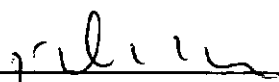


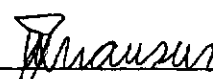
UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS  
DA ELASTODINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

*Marise Castro Rebelo Fontenelle Dumans*

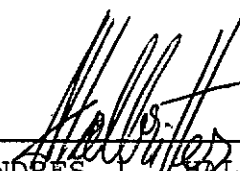
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
JOSÉ CLAUDIO DE FARIA TELLES  
(Presidente)

  
\_\_\_\_\_  
WEBE JOÃO MANSUR

  
\_\_\_\_\_  
FERNANDO VENÂNCIO FILHO

  
\_\_\_\_\_  
ANDRES L. HALBRITTER

Rio de Janeiro, RJ. - Brasil

Novembro do 1985

DUMANS, MARISE CASTRO REBELO FONTENELLE

Uma aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas da Elastodinâmica no Domínio da Freqüência (Rio de Janeiro) 1985.

xiv , 149 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1985).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Problemas da Elastodinâmica no Domínio da Freqüência.

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

AO MEU ESPOSO, CARLOS FERNANDO

A MEUS PAIS, DARINO E LÚCIA

A MEUS IRMÃOS,

FÁTIMA E RICARDO

CLÁUDIA E ALBERTO

AGRADECIMENTO

Ao Professor José Claudio de Faria Telles, pela orientação e estímulo constante, tornando possível a realização deste trabalho.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

AN APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO ELASTODYNAMIC  
PROBLEMS IN THE FREQUENCY DOMAIN

Marise Castro Rebelo Fontenelle Dumans

November, 1985

Chairman : José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

ABSTRACT

The Direct Boundary Element Method is applied to solve general elastodynamic problems for homogeneous, isotropic and linearly elastic bodies. The Fourier Integral Transform technique is used to transform an elliptic partial differential equation with respect to time in an equation solvable in the frequency domain. This equation can be recast, through the weighted residual method, into an integral equation which, via a limiting process, yields the boundary integral equation.

The numerical formulation for the steady-state case is presented. The numerical integration (Gaussian Quadrature) is employed to evaluate all integrals except those in the Cauchy principal value sense which are performed analytically. The third order tensors needed for the evaluation of internal stresses are also derived.

Finally, three examples are presented. The results are in excellent agreement with numerical, theoretical and other authors' results. The Boundary Element Method is shown to be an economical method for a wide range of practical problems.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS  
DA ELASTODINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Marise Castro Rebelo Fontenelle Dumans

Novembro de 1985

Orientador: José Claudio de Faria Telles

Programa : Engenharia Civil

RESUMO

O Método dos Elementos de Contorno em sua formulação direta é utilizado para a solução de problemas elastodinâmicos envolvendo corpos homogêneos e elástico-lineares. Através da utilização da transformada integral de Fourier, transforma-se a equação diferencial parcial elíptica no domínio do tempo, em uma equação no domínio da frequência. O Método dos Resíduos Ponderados é, então, aplicado a esta equação para se obter a equação integral nos pontos internos. Utilizando-se um processo de limite, consegue-se finalmente a equação integral no contorno.

A implementação numérica para o caso harmônico é desenvolvida. A integração numérica (quadratura de Gauss) é utilizada para o cálculo das integrais em elementos não singulares. Nos casos em que a singularidade pertence ao elemento, as integrais são calculadas analiticamente inclusive no sentido de valor principal de Cauchy. Os tensores de terceira ordem necessários para o cálculo das tensões são obtidos por derivação.

Finalmente, três exemplos são apresentados. Os resultados obtidos apresentam-se em excelente concordância com os de outros autores. O Método de Elementos de Contorno mostrou-se econômico para muitos problemas.

NOTAÇÕES

$\Omega$	domínio do corpo
$\Gamma$	contorno do corpo
$G$ e $\lambda$	constantes de Lamê
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\bar{\nu}$	$= \nu / (1 + \nu)$
$E$	módulo de elasticidade
$\rho$	densidade de massa
$\delta_{ij}$	símbolo de Kronecker
$\delta(r)$	função delta de Dirac
$F_{,i}$	derivada espacial na direção $i$
$\dot{F}$	derivada temporal
$t$	tempo
$u_j$	componentes do deslocamento
$\sigma_{ij}$	componentes da tensão

$p_j$	componentes das forças de superfície
$b_j$	componentes das forças de volume
$\epsilon_{ij}$	componentes das deformações específicas
$x_i$	coordenadas cartesianas
$n_i$	coseno diretor da normal unitária exterior ao <u>con</u> torno
rot	rotacional
$\nabla$	vetor operador
div	divergente
$C_1$	velocidade de propagação das ondas primárias
$C_2$	velocidade de propagação das ondas secundárias
$w$	freqüência da onda
$T$	período
$k$	número de onda ou freqüência espacial
$\lambda'$	comprimento de onda ou período espacial
$e_i$	vetor unitário na direção $i$



$U_{ij}^*$	componentes dos deslocamentos fundamentais harmônicos
$P_{ij}^*$	componentes das forças de superfície fundamentais harmônicas
$\xi$	ponto fonte
$x$	ponto campo
$r$	distância entre $\xi$ e $x$
$\psi$ e $\chi$	funções utilizadas em $U_{ij}^*$ e $P_{ij}^*$
$K_\nu(Z)$	funções de Bessel modificadas da segunda classe de ordem $\nu$
$\underline{M}$ , $\underline{L}$ e $\underline{N}$	funções de interpolação
$\underline{U}$ e $\underline{B}$	vetores dos deslocamentos e das forças de volume transformados através da transformada integral de Fourier
$\underline{\tilde{B}}$	vetor das forças de volume dividido por $\rho$
$\underline{x}^{(n)}$	vetor das coordenadas nodais para um elemento
$\underline{u}^{(n)}$	vetor dos deslocamentos nodais para um elemento

$\underline{p}^{(n)}$	vetor das forças de superfície para um elemento
G	jacobiano da transformação (para elementos de volume)
J	jacobiano da transformação (para elementos de área)
$\underline{C}$ , $\underline{H}$ e $\underline{G}$	matrizes (equações (4.2.8))
$\underline{A}$	matriz do sistema final de equações
$\underline{f}$	termo independente do sistema final de equações.

ÍNDICE

	Página
CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO -----	2
CAPÍTULO 2: EQUAÇÕES DO PROBLEMA -----	6
2.1. Introdução -----	6
2.2. Elasticidade Linear -----	6
2.2.1. Notação Cartesiana Indicial -----	6
2.2.2. Símbolo Delta de Kronecker -----	6
2.2.3. Função Generalizada Delta de Dirac -----	7
2.2.4. Constantes Elásticas -----	7
2.2.5. Equações de Movimento -----	8
2.2.6. Relações Deformação-Deslocamento -----	8
2.2.7. Lei de Hooke -----	9
2.2.8. Condições Iniciais -----	9
2.2.9. Componentes de Força de Superfície e de Tensão ----	9

2.2.10. Condições de Contorno -----	10
2.2.10.1. Deslocamento -----	10
2.2.10.2. Força -----	10
2.2.11. Equações de Movimento em Termos de Desloca- mentos (Equações de Navier) -----	10
2.3. Ondas Primárias (P) e Ondas Secundárias (S) -----	11
2.4. Equações de Navier em Função das Velocidades $C_1$ e $C_2$	14
2.5. Definição e Geometria das Ondas Planas -----	14
2.6. Equação de Navier Para o Caso Harmônico -----	16
 CAPÍTULO 3: FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO	24
3.1. Introdução -----	24
3.2. Soluções Fundamentais -----	24
3.2.1. Caso Tri-dimensional -----	27
3.2.2. Caso Bi-dimensional -----	29
3.3. Equação Integral Para os Pontos Internos -----	32
3.4. Tensões nos Pontos Internos -----	35
3.5. Equação Integral no Contorno -----	36

CAPÍTULO 4: IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO -----	45
4.1. Introdução -----	45
4.2. Procedimento Numérico Geral -----	47
4.3. Caso Bi-dimensional com Elementos Constantes -----	53
4.3.1. Coordenadas Cartesianas -----	54
4.3.2. Deslocamentos e Forças de Superfície -----	54
4.3.3. Equação no Contorno -----	55
4.3.4. Integração Numérica -----	55
4.3.5. Integração Analítica -----	57
4.3.6. Soluções Para Pontos Internos -----	60
CAPÍTULO 5: COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÕES ESTÁTICAS E SOLU- ÇÕES DINÂMICAS A BAIXAS FREQUÊNCIAS -----	68
CAPÍTULO 6: DESCRIÇÃO DO PROGRAMA -----	76
6.1. Introdução -----	76
6.2. Estrutura do Programa Principal (Fluxograma) -----	76
6.3. Descrição das Sub-rotinas -----	76
6.4. Funções Simples e Complexas -----	78
6.5. Entrada dos Dados -----	81
6.6. Saída dos Resultados -----	82

CAPÍTULO 7: EXEMPLOS -----	87
7.1. Introdução -----	87
7.2. Barragem de Terra -----	87
7.3. Matriz de Rigidez de Fundações -----	94
7.3.1. Superficial -----	95
7.3.2. Embutida -----	103
7.4. Cavidade Num Meio Infinito -----	108
CAPÍTULO 8: CONCLUSÕES -----	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS -----	124
APÊNDICE A: MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS -----	131
APÊNDICE B: CÁLCULO DE $C_{ij}$ -----	135
APÊNDICE C: NOÇÕES SOBRE AS FUNÇÕES DE BESSEL -----	141

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos é o mais conhecido método numérico atualmente. O domínio do corpo é subdividido em uma coleção de subdomínios interligados, de formas simples, chamados elementos finitos. O comportamento real da solução é aproximado através de funções triviais, normalmente polinômios. Tais funções são unicamente definidas em termos dos valores aproximados da solução (e possivelmente de suas derivadas) em certos pontos nodais localizados dentro ou no contorno de cada elemento. Esta aproximação é, então, obtida através da aplicação de alguma técnica, como resíduos ponderados ou algum tipo de princípio variacional (minimização de energia), conduzindo, dessa forma, a um sistema de equações simétrico e em banda, envolvendo valores desconhecidos da solução aproximada nos pontos nodais.

Há, no entanto, certas classes de problemas em que o método dos elementos finitos não se comporta satisfatoriamente. Pesquisas foram realizadas para se descobrir técnicas alternativas, baseadas em equações integrais.

Nestas técnicas modernas, a equação diferencial que governa o problema é transformada em uma equação integral definida ao longo da superfície, reduzindo dessa forma a dimensão do problema de uma unidade. A superfície é, então, discretizada em um número de elementos de contorno, ao longo dos quais, funções polinomiais (dos tipos usados para elementos finitos) são introduzidas para a interpolação dos valores da solução aproximada entre



os pontos nodais. Isto permite o cálculo das integrais, normalmente através de um processo numérico, resultando em um sistema de equações de menor dimensão.

O Método de Elementos de Contorno apresenta características importantes, justificando assim a crescente popularidade adquirida:

1. sistema de equações reduzido;
2. fácil entrada de dados e interpretação dos resultados;
3. aplicável a problemas envolvendo regiões semi-infinitas e infinitas;
4. cálculo seletivo e preciso das tensões internas e deslocamentos em fase de pós-processamento;
5. boa performance na resolução de problemas de concentração de tensões.

Os problemas que podem ser descritos por equações diferenciais parciais elípticas são os mais estudados na literatura de elementos de contorno. Tais problemas podem ser os envolvendo a equação de Laplace na teoria do Potencial ou a equação de Navier na Elasticidade.

O Método de Elementos de Contorno tem demonstrado ser um método versátil e eficiente para muitos problemas de Engenharia como, por exemplo, na mecânica das estruturas, geomecânica, mecânica dos fluídos, condução de calor e na engenharia elétrica.

## CAPÍTULO 2

### EQUAÇÕES DO PROBLEMA

## CAPÍTULO 2

### EQUAÇÕES DO PROBLEMA

#### 2.1 - Introdução

Este capítulo define parte da simbologia e relações que serão utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

As equações apresentadas correspondem à teoria dos pequenos deslocamentos para materiais homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares.

#### 2.2 - Elasticidade Linear

##### 2.2.1 - Notação Cartesiana Indicial

Os índices 1, 2 e 3 são usados para substituir x, y e z e os símbolos de somatório são desnecessários sempre que um mesmo índice aparecer 2 vezes em um termo qualquer.

$$\text{ex: } a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (2.2.1.1)$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

##### 2.2.2 - Símbolo Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.2.2.1)$$

### 2.2.3 - Função Generalizada Delta de Dirac

A função generalizada Delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\delta(x_0, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ \infty & \text{se } x = x_0 \end{cases} \quad (2.2.3.1)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0, x) dx = 1 \quad (2.2.3.2)$$

### 2.2.4 - Constantes Elásticas

O material de um corpo representado por seu domínio  $\Omega$  e seu contorno  $\Gamma$  (Figura 2.1) é definido pelas seguintes constantes elásticas:

$G$  e  $\lambda$ : constantes de Lamé

$E$ : módulo de elasticidade ou de Young

$\nu$ : coeficiente de Poisson

As relações fornecidas por estas constantes são:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.2.4.1)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \quad (2.2.4.2)$$

O comportamento dinâmico de um corpo elástico-linear é governado pelas seguintes equações:

#### 2.2.5 - Equações de Movimento

$$\sigma_{ij,i} + b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (2.2.5.1)$$

onde:  $\sigma_{ij}$ : componentes do tensor de tensões

$b_j$ : componentes das forças de volume

$\rho$ : densidade de massa

$u_j$ : componentes do vetor deslocamento

As derivadas espaciais são indicadas por vírgula, isto é,  $\partial \sigma_{ij} / \partial x_i = \sigma_{ij,i}$ , enquanto que as derivadas temporais por pontos.

#### 2.2.6 - Relações Deformação-Deslocamento

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2.6.1)$$

onde:  $\epsilon_{ij}$ : tensor de deformações específicas de Cauchy

$u_i$ : componentes do vetor de deslocamentos

### 2.2.7 - Lei de Hooke

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.2.7.1)$$

### 2.2.8 - Condições Iniciais

$$u_i(x, t) = u_i^0(x) \quad \text{para } t = t_0 \text{ em } \Omega + \Gamma \quad (2.2.8.1)$$

$$\dot{u}_i(x, t) = v_i^0(x)$$

onde:  $u_i^0(x)$  e  $v_i^0(x)$  são funções prescritas.

### 2.2.9 - Componentes de Força de Superfície e de Tensão

As componentes de força de superfície são definidas pela seguinte relação:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.2.9.1)$$

onde:  $n_j$ : cosenos diretores da normal exterior ao contorno (Figura 2.2).

Ao substituir os valores de  $\varepsilon_{ij}$  (equação (2.2.6.1)) na equação (2.2.7.1), obtem-se as tensões em termos das derivadas dos deslocamentos:

$$\sigma_{ij} = G (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \quad (2.2.9.2)$$

Os valores de  $\sigma_{ji}$  (equação (2.2.9.2)) ao serem substituídos na equação (2.2.9.1), fornecem as componentes das forças de superfície:

$$p_i = G \left( \frac{\partial u_i}{\partial n} + u_{j,i} n_j \right) + \lambda u_{j,j} n_i \quad (2.2.9.3)$$

## 2.2.10 - Condições de Contorno

### 2.2.10.1 - Deslocamento

$$u_i(x, t) = \overline{u_i}(x, t) \text{ para } t > t_0 \text{ em } \Gamma_1 \quad (2.2.10.1.1)$$

### 2.2.10.2 - Força de Superfície

$$p_i(x, t) = \overline{p_i}(x, t) \text{ para } t > t_0 \text{ em } \Gamma_2 \quad (2.2.10.2.1)$$

onde a barra indica que os valores são conhecidos em  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

## 2.2.11 - Equações de Movimento em Termos de Deslocamentos (Equações de Navier)

Substituindo-se os valores de  $\sigma_{ij}$  (equação (2.2.9.2)) na equação (2.2.5.1), obtem-se a equação de movimento de Navier em termos de deslocamentos:

$$(\lambda + G) u_{i,ij} + G u_{j,ii} + b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (2.2.11.1)$$



### 2.3 - Ondas Primárias (P) e Ondas Secundárias (S)

A equação (2.2.11.1) pode ainda ser escrita como:

$$(\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + G \nabla^2 \vec{u} + \vec{b}_j = \rho \ddot{\vec{u}}_j \quad (2.3.1)$$

ou

$$(\lambda + 2G) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - G \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{b}_j = \rho \ddot{\vec{u}}_j \quad (2.3.2)$$

onde  $\vec{u}$ : vetor de deslocamento

- o vetor operador  $\nabla$  é definido por:

$$\nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (2.3.3)$$

- o Laplaciano ( $\nabla^2$ ) é definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (2.3.4)$$

Na ausência das forças de volume ( $\vec{b}_j = 0$ ) obtém-se 2 tipos diferentes de ondas: ondas P (ou ondas primárias) e ondas S (ou ondas secundárias).

Aplicando-se o rotacional a ambos os lados da equação (2.3.1):

$$G \nabla^2 (\text{rot } \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot } \vec{u}) \quad (2.3.5)$$

$$\text{mas } \text{rot } \vec{u} = 2\vec{w} \quad (2.3.6)$$

onde  $\vec{w}$  é a rotação de uma partícula elementar.

Desse modo a equação (2.3.5) poderá ser escrita co  
mo:

$$\frac{G}{\rho} \nabla^2 \vec{w} = \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} \quad (2.3.7)$$

Aplicando-se agora a divergência a ambos os lados da equação (2.3.1):

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 \theta = \rho \ddot{\theta} \quad (2.3.8)$$

$$\text{onde } \theta = u_{k,k} = \text{div } \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} \quad (2.3.9)$$

Ou ainda:

$$\frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2.3.10)$$

As equações (2.3.7) e (2.3.10) pertencem a uma fa  
mília de equações de onda da forma:

$$C^2 \nabla^2 \psi = \ddot{\psi} \quad (2.3.11)$$

onde C é a velocidade da onda.

Sendo  $\theta$  uma mudança específica de volume e  $\vec{w}$  uma  
distorção sem mudança de volume ( $\text{div } \vec{w} = 0$ ), a equação (2.3.7)

representa as ondas de distorção ou ondas secundárias (ondas S), enquanto que a equação (2.3.10) representa as ondas de dilatação ou ondas primárias (ondas P).

Assim, chamando:

$$C_1 = \sqrt{\left[ \frac{\lambda + 2G}{\rho} \right]} \quad (2.3.12)$$

e

$$C_2 = \sqrt{\left[ \frac{G}{\rho} \right]} \quad (2.3.13)$$

As expressões (2.3.12) e (2.3.13) indicam que a velocidade  $C_1$  está associada as ondas de dilatação ou ondas primárias (P) e a velocidade  $C_2$  está relacionada as ondas de distorção ou ondas secundárias (S).

Quando as ondas de propagação encontram uma descontinuidade, ocorrem os fenômenos de reflexão, refração e difração, sendo o movimento da onda resultante a superposição de todas essas componentes.

Dividindo-se uma expressão pela outra:

$$\frac{C_1}{C_2} = \sqrt{\left[ \frac{\lambda + 2G}{G} \right]} = \sqrt{\left[ 2 + \frac{\lambda}{G} \right]} \quad (2.3.14)$$

Desde que  $\lambda$  e  $G$  sejam positivos, tem-se que:

$$\frac{C_1}{C_2} > 1 \quad (2.3.15)$$

Dessa expressão, verifica-se que as ondas  $C_1$  (primárias) são mais rápidas que as ondas  $C_2$  (secundárias).

#### 2.4 - Equações de Navier em Função das Velocidades $C_1$ e $C_2$

Substituindo-se na equação (2.2.11.1) os valores de  $C_1$  e  $C_2$ :

$$(C_1^2 - C_2^2) u_{i,ij} + C_2^2 u_{j,ii} + \frac{b_j}{\rho} = \ddot{u}_j \quad (2.4.1)$$

#### 2.5 - Definição e Geometria das Ondas Planas

Considerando-se a equação uni-dimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.5.1)$$

$$\text{e a solução: } u = e^{pt + qx} \quad (2.5.2)$$

$$\text{Assim } \ddot{u} = p^2 u = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C^2 q^2 u \quad (2.5.3)$$

$$\text{e } p = \pm Cq \quad (2.5.4)$$

$$\text{Desse modo: } u = Ae^{q(Ct+x)} + Be^{-q(Ct-x)} \quad (2.5.5)$$

Se  $q = ik$  e introduzindo-se o fator  $e^{i\varepsilon}$ , a equação (2.5.2) poderá ser escrita:

$$u = Ae^{i[k(Ct+x) + \varepsilon]} + Be^{i[k(-Ct+x) + \varepsilon]} \quad (2.5.6)$$

A equação (2.5.6) é a solução da equação (2.5.1) para qualquer  $k$  e  $\epsilon$ . O primeiro termo desta solução representa a onda que se aproxima enquanto que o segundo a onda que se afasta.

A solução da equação generalizada poderá ser expressa como:

$$u = A e^{i[k(\vec{r} \cdot \vec{v} - Ct) + \epsilon]} \quad (2.5.7)$$

onde  $\vec{v}$  é a normal à frente da onda,  $\vec{r}$  a direção de propagação e  $\epsilon$  o ângulo de fase.

As seguintes notações são normalmente usadas:

$$\text{Frequência} \quad : \quad w = kC = \frac{2\pi}{T} \quad (2.5.8)$$

$$\text{Período} \quad : \quad T = \frac{2\pi}{kC} \quad (2.5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Número de onda} \\ \text{(ou frequência espacial)} : k = \frac{2\pi}{\lambda'} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Comprimento de onda} \\ \text{(ou período espacial)} : \lambda' = \frac{2\pi}{k} \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

$$\text{A frequência é: } w = \frac{C2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow C = \frac{\lambda'}{T} \quad (2.5.12)$$

As ondas P se propagam na direção  $\vec{r}$  enquanto que as ondas S num plano normal a  $\vec{r}$ . É usual decompor as ondas S em SV e SH ao longo das direções indicadas na Figura 2.3:

- (a) a direção das ondas SV corresponde a interseção de um plano normal a direção  $\vec{r}$  com o plano vertical definido por  $\vec{r}$  e o eixo  $x_3$ .
- (b) a direção das ondas SH corresponde a interseção de um plano normal a direção  $\vec{r}$  com o plano  $x_1x_2$ .

Quando os corpos apresentam uma superfície com descontinuidade de material, aparece um tipo diferente de onda plana chamada "onda de superfície", que se propaga paralelamente à mesma. A perturbação apresentada diminui exponencialmente à medida que se afasta da superfície.

Quando os corpos apresentam uma superfície livre, estas ondas são chamadas "ondas de Rayleigh" (Figura 2.4), seu deslocamento é elíptico, anti-horário e no plano de propagação. Ondas de superfície com deslocamento perpendicular ao plano de propagação existem somente em semi-espacos em camadas e são chamadas "ondas de Love" (Figura 2.4).

## 2.6 - Equação de Navier para o Caso Harmônico

É importante, em muitos casos, prever o comportamento dinâmico de um corpo ou estrutura sob o efeito de uma excitação harmônica. A resposta para tal solicitação é uma função da frequência. As condições iniciais podem ser negligenciadas assumindo-se a hipótese de que um tempo suficientemente longo se passou, de tal modo que o estado estacionário foi alcançado. Essa

ta situação pode ser representada matematicamente aplicando-se a transformada integral de Fourier à equação do problema.

Seja  $\psi(t)$  a função a ser transformada:

$$\bar{\psi}(w) = F\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-iwt} dt \quad (2.6.1)$$

e

$$\psi(t) = F^{-1}\bar{\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(w) e^{iwt} dw \quad (2.6.2)$$

Integrando-se por partes a equação (2.6.1), tem-se:

$$F \frac{d^2\psi}{dt^2} = (iw)^2 \bar{\psi}(w) \quad (2.6.3)$$

Aplicando-se este procedimento à equação (2.4.1), as variáveis transformadas podem ser representadas como:

$$U_j(x, w) = F [\bar{u}_j(x, t)] = -w^2 U_j \quad (2.6.4)$$

$$B_j(x, w) = F [\bar{b}_j(x, t)] = B_j \quad (2.6.5)$$

Assim, a equação de Navier se transforma em:

$$(C_1^2 - C_2^2) U_{i,ij} + C_2^2 U_{j,ii} + \frac{B_j}{\rho} + w^2 U_j = 0 \quad (2.6.6)$$

com as condições de contorno transformadas:

$$U_i(x, w) = \bar{U}_i(x, w) \text{ em } \Gamma_1$$

(2.6.7)

$$P_i(x, w) = \bar{P}_i(x, w) \text{ em } \Gamma_2$$

É importante notar que as condições iniciais não entram na formulação e que a transformada da equação de movimento é uma equação diferencial parcial elíptica.



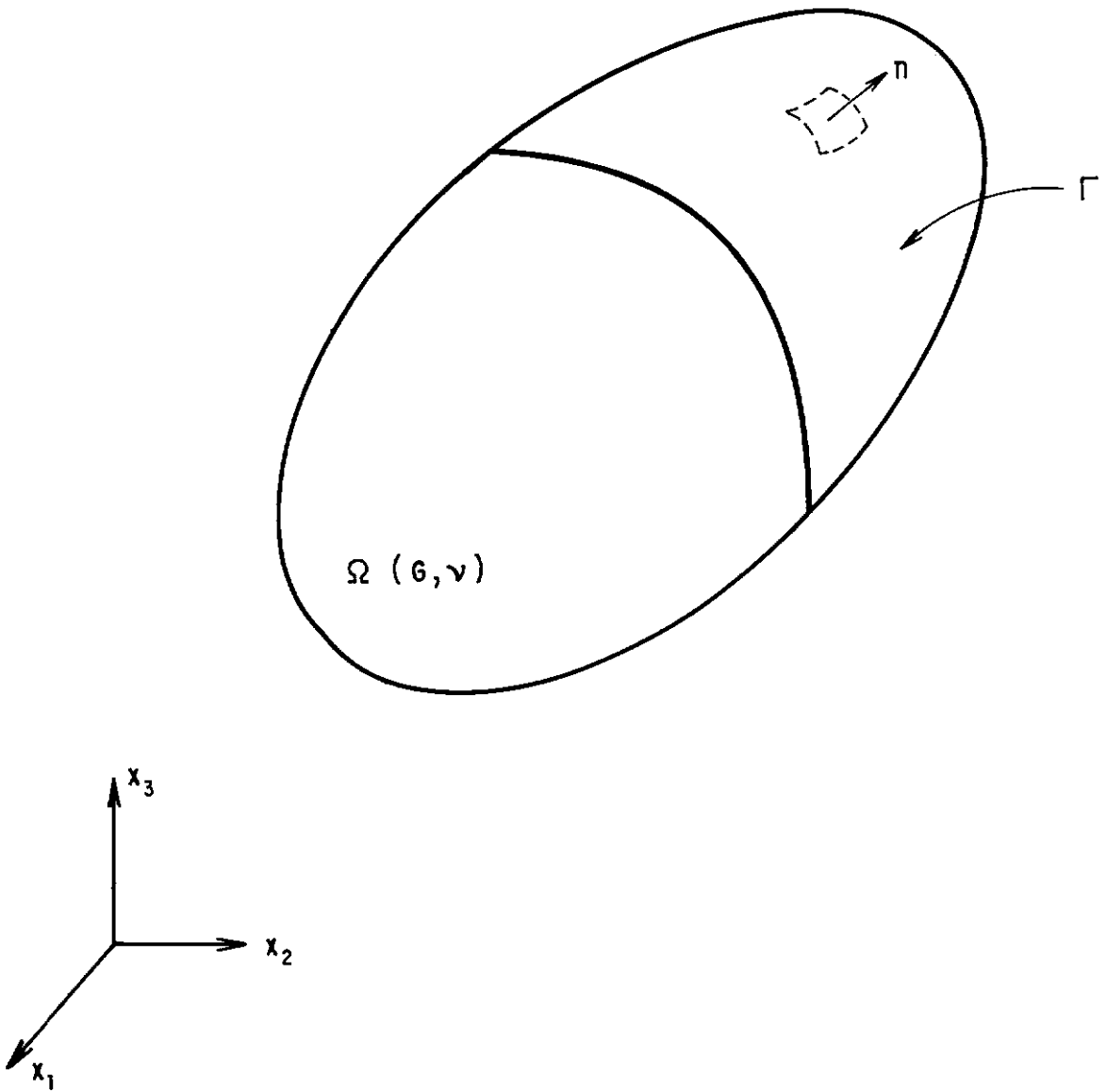


FIGURA 2.1      Corpo Tridimensional com Domínio  $\Omega$  e Contorno  $\Gamma$

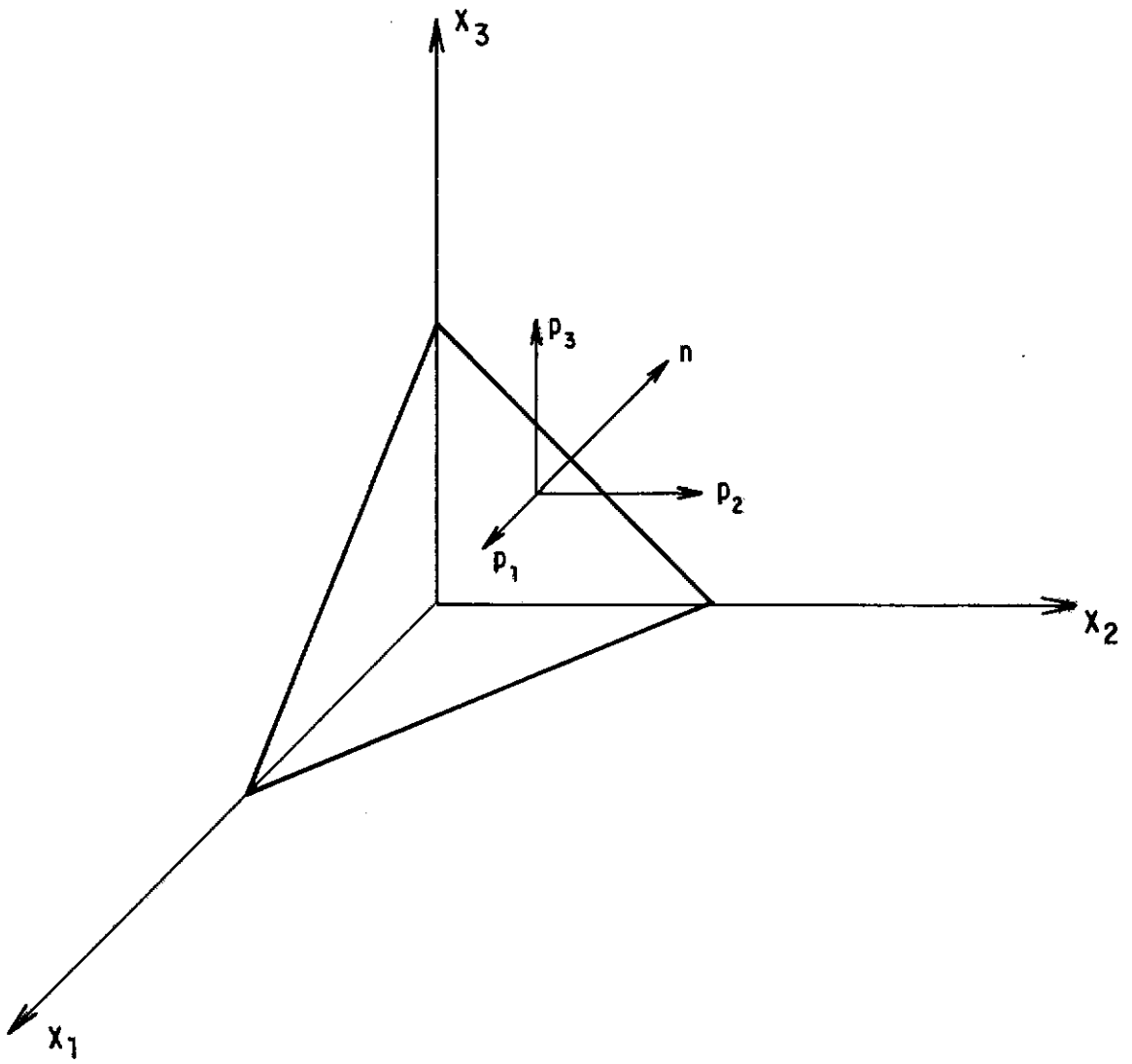


FIGURA 2.2 Componentes das Forças de Superfície

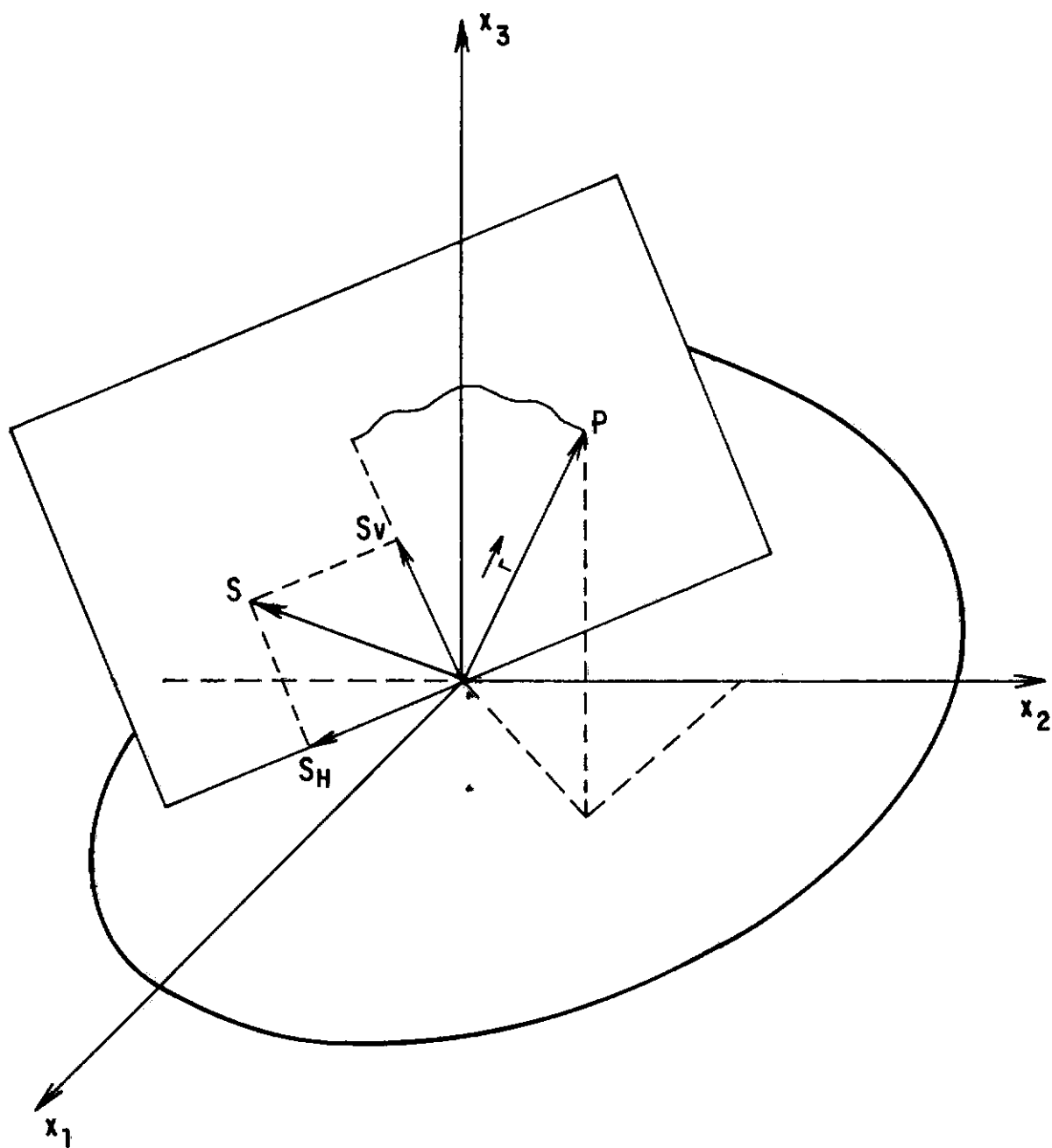


FIGURA 2.3 Propagação das Ondas Planas no Espaço

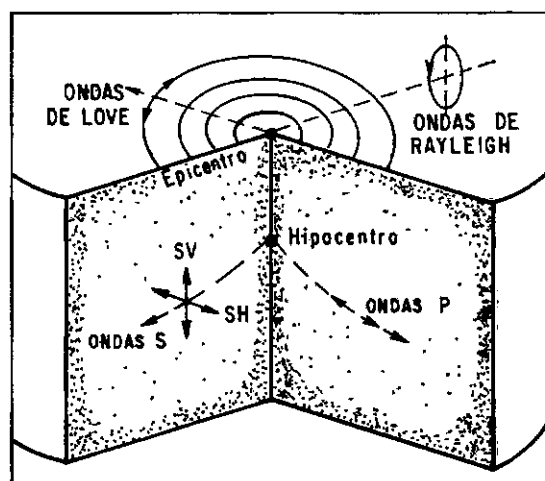


FIGURA 2.4 Representação dos Tipos de Onda

## CAPÍTULO 3

### FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

### CAPÍTULO 3

#### FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

##### 3.1 - Introdução

Muitos problemas de Engenharia podem ser descritos por algum tipo de equação diferencial parcial e condições de contorno prescritas.

As equações diferenciais parciais elípticas (e também as parabólicas e hiperbólicas) podem ser transformadas através de um processo de limite em equações integrais, produzindo dessa forma uma equação integral no contorno relacionando somente valores das incógnitas no contorno.

Este capítulo abrange as soluções fundamentais, a equação integral para os pontos internos, as tensões internas e a equação integral no contorno.

##### 3.2 - Soluções Fundamentais

A solução fundamental corresponde à resposta de um meio elástico infinito a ação de uma carga harmônica concentrada de frequência  $w$ .

Esta resposta poderá ser obtida da equação (2.6.6), fazendo-se a seguinte substituição:

$$\vec{B} = \delta(\xi, x) \vec{e} \quad (3.2.1)$$

onde  $\delta(\xi, x)\vec{e}$  representa a ação de uma carga concentrada dinâmica unitária;  $\delta(\xi, x)$  é a função delta de Dirac;  $\xi$  o ponto de aplicação da carga;  $x$  um ponto qualquer do meio e  $\vec{e}$  o vetor unitário na direção da carga.

Definindo  $r = |\xi - x|$  como a distância entre os pontos  $\xi$  e  $x$ , a expressão (3.2.1) pode ser escrita como:

$$\vec{B} = \delta(r)\vec{e} \quad (3.2.2)$$

A equação (2.6.6) pode ainda ser expressa da seguinte maneira:

$$(C_1^2 - C_2^2) \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) - C_2^2 \nabla \times (\nabla \times \vec{U}) + w^2 \vec{U} = \frac{\vec{B}}{\rho} \quad (3.2.3)$$

Decompondo-se  $\vec{U}$  em dois potenciais  $\vec{A}_1$  e  $\vec{A}_2$ , isto é, em suas partes irrotacional e equivolumial:

$$\vec{U} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}_1) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}_2 \quad (3.2.4)$$

Assumindo-se que  $\vec{B}$  possa ser escrito em termos do potencial escalar  $V$ :

$$\vec{B} = \nabla^2 V \vec{e} = (\nabla \nabla V - \nabla \times \nabla \times V) \vec{e} \quad (3.2.5)$$

$$\text{e que: } k_1 = \frac{w}{C_1} \text{ e } k_2 = \frac{w}{C_2} \quad (3.2.6)$$

Substituindo-se as equações (3.2.4), (3.2.5) e (3.2.6) na equação (3.2.3):

$$C_1^2 \nabla \nabla \left\{ \nabla \nabla \vec{A}_1 - k_1^2 \vec{A}_1 + \frac{V}{\rho C_1^2} \vec{e} \right\} + C_2^2 \nabla \times \nabla \times \left\{ \nabla \times \nabla \times \vec{A}_2 + k_2^2 \vec{A}_2 - \right. \\ \left. - \frac{V}{\rho C_2^2} \vec{e} \right\} = 0 \quad (3.2.7)$$

ou ainda:

$$C_1^2 \nabla \nabla \left\{ \nabla \nabla \vec{A}_1 - \nabla \times \nabla \times \vec{A}_1 - k_1^2 \vec{A}_1 + \frac{V}{\rho C_1^2} \vec{e} \right\} + C_2^2 \nabla \times \nabla \times \left\{ \nabla \times \nabla \times \vec{A}_2 - \right. \\ \left. - \nabla \nabla \vec{A}_2 + k_2^2 \vec{A}_2 - \frac{V}{\rho C_2^2} \vec{e} \right\} = 0 \quad (3.2.8)$$

A equação (3.2.8) será satisfeita se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{A}_1 - k_1^2 \vec{A}_1 = - \frac{V}{\rho C_1^2} \vec{e} \\ \nabla^2 \vec{A}_2 - k_2^2 \vec{A}_2 = - \frac{V}{\rho C_2^2} \vec{e} \end{array} \right. \quad (3.2.9)$$

Considerando-se que  $\vec{A}_1$  e  $\vec{A}_2$  estão na direção da carga:  $\vec{A}_1 = A_1 \vec{e}$  e  $\vec{A}_2 = A_2 \vec{e}$ , as equações abaixo são satisfeitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 A_1 - k_1^2 A_1 = - \frac{V}{\rho C_1^2} \\ \nabla^2 A_2 - k_2^2 A_2 = - \frac{V}{\rho C_2^2} \end{array} \right. \quad (3.2.10)$$



Ambas equações podem ser escritas na forma:

$$\nabla^2 A - k^2 A = - \frac{V}{\rho C^2} \quad (3.2.11)$$

A equação (3.2.11) corresponde a uma equação diferencial que poderá ser resolvida para cada caso:

### 3.2.1 - Caso Tri-dimensional

Neste caso  $\delta(r)$  pode ser obtido como:

$$\delta(r) = - \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) \implies V = - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (3.2.1.1)$$

Substituindo-se a equação (3.2.1.1) na equação (3.2.11), tem-se que:

$$\nabla^2 A - k^2 A = \frac{1}{4\pi \rho C^2} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (3.2.1.2)$$

Uma solução particular para a equação (3.2.1.2) é:

$$A_p = - \frac{1}{4\pi \rho C^2 k^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi \rho w^2} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (3.2.1.3)$$

A solução da equação homogênea  $\nabla^2 A - k^2 A = 0$  é dada por:

$$A_h = C' \frac{e^{kr}}{r} + C'' \frac{e^{-kr}}{r} \quad (3.2.1.4)$$

Assim:

$$A_1 = \frac{1}{4\pi\rho w^2} \left(-\frac{1}{r}\right) + C_1' \frac{e^{k_1 r}}{r} + C_1'' \frac{e^{-k_1 r}}{r} \quad (3.2.1.5)$$

$$A_2 = \frac{1}{4\pi\rho w^2} \left(-\frac{1}{r}\right) + C_2' \frac{e^{k_2 r}}{r} + C_2'' \frac{e^{-k_2 r}}{r}$$

Os deslocamentos e as tensões podem ser obtidos por derivação.

Para o cálculo das constantes  $C_1'$ ,  $C_1''$ ,  $C_2'$  e  $C_2''$  basta considerarmos o equilíbrio numa pequena região ao redor da carga, bem como as condições de radiação. Desse modo os valores das constantes são obtidos:

$$C_1' = C_2' = 0 \quad (3.2.1.6)$$

$$C_1'' = C_2'' = \frac{1}{4\pi\rho w^2}$$

Substituindo-se os valores das constantes nas equações (3.2.1.5), e depois na equação (3.2.4) obtem-se:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{\alpha\pi\rho C_2^2} \left[ \psi \delta_{ij} - \chi_{r,i} r_{,j} \right] \quad (3.2.1.7)$$

As componentes das forças de superfície com normal exterior  $n$  são:

$$\begin{aligned}
 P_{ij}^* = \frac{1}{\alpha\pi} & \left[ \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) \left( \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_i \right) - \frac{2\chi}{r} \left( n_j r_{,i} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + \left( \frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right) \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\alpha\chi}{2r} \right) r_{,i} n_j \right] \quad (3.2.1.8)
 \end{aligned}$$

$\alpha = 4$  e  $\delta_{ij}$  é o símbolo delta de Kronecker. As funções  $\psi$  e  $\chi$  são definidas como:

$$\psi = \frac{e^{-k_2 r}}{r} + \left( \frac{1}{k_2^2 r^2} + \frac{1}{k_2 r} \right) \frac{e^{-k_2 r}}{r} - \frac{C_2^2}{C_1^2} \left( \frac{1}{k_1^2 r^2} + \frac{1}{k_1 r} \right) \frac{e^{-k_1 r}}{r} \quad (3.2.1.9)$$

$$\chi = \left( \frac{3}{k_2^2 r^2} + \frac{3}{k_2 r} + 1 \right) \frac{e^{-k_2 r}}{r} - \frac{C_2^2}{C_1^2} \left( \frac{3}{k_1^2 r^2} + \frac{3}{k_1 r} + 1 \right) \frac{e^{-k_1 r}}{r}$$

### 3.2.2 - Caso Bi-dimensional

No caso bi-dimensional, a mesma representação para o movimento e as mesmas transformações são feitas para obter a equação (3.2.11), sendo o operador  $\nabla^2$  agora bi-dimensional.

A função delta de Dirac em termos de potencial é expressa como:

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi} \nabla^2 (\ln(r)) \implies V = \frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (3.2.2.1)$$

Substituindo-se a equação (3.2.2.1) na equação (3.2.11), tem-se que:

$$\nabla^2 A - k^2 A = - \frac{1}{2\pi\rho C^2} \ln(r) \quad (3.2.2.2)$$

Uma solução particular para a equação acima é:

$$A_p = \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \ln(r) \quad (3.2.2.3)$$

A solução da equação homogênea  $\nabla^2 A - k^2 A = 0$  é dada por:

$$A_h = C' K_0(kr) + C'' I_0(kr) \quad (3.2.2.4)$$

onde  $I_0$  e  $K_0$  são as funções de Bessel modificadas da primeira e segunda classe de ordem zero.

Assim:

$$A_1 = - \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \ln(r) + C'_1 K_0(k_1 r) + C''_2 I_0(k_1 r) \quad (3.2.2.5)$$

$$A_2 = - \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \ln(r) + C''_1 K_0(k_2 r) + C''_2 I_0(k_2 r)$$

Os deslocamentos e as tensões são obtidos por derivação.

As constantes são conseguidas por equilíbrio e pelas condições de radiação.

Os resultados para  $U_{ij}^*$  e  $P_{ij}^*$  são dados pelas mesmas equações (3.2.1.7) e (3.2.1.8) com os seguintes valores para  $\psi$ ,  $\chi$  e  $\alpha$ :

$$\psi = K_0(k_2 r) + \frac{1}{k_2 r} \left[ K_1(k_2 r) - \frac{C_2}{C_1} K_1(k_1 r) \right]$$

$$\chi = K_2(k_2 r) - \frac{C_2^2}{C_1^2} K_2(k_1 r) \quad (3.2.2.6)$$

$$\alpha = 2$$

onde  $K_i$  é a função de Bessel modificada da segunda classe de ordem  $i$ .

Estas equações foram desenvolvidas para o estado plano de deformação, no entanto, são também válidas para problemas de estado plano de tensão desde que  $\nu$  (coeficiente de Poisson) seja substituído por  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu}$ . Em ambos os casos, o valor de  $G$  permanece o mesmo.

Temos, ainda, que:

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \quad (3.2.2.7)$$

$$r = \left[ r_i r_i \right]^{1/2} \quad (3.2.2.8)$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} = - \frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \quad (3.2.2.9)$$

$n_i$  = coseno diretor da normal na direção  $i$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \left[ \frac{\partial r}{\partial x_1(x)} \frac{\partial x_1(x)}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_2(x)} \frac{\partial x_2(x)}{\partial n} \right] = r_{,i} n_i \quad (3.2.2.10)$$

### 3.3 - Equação Integral para os Pontos Internos

O método dos Resíduos Ponderados será utilizado para chegarmos à equivalência dinâmica da Identidade de Somigliana, usualmente conhecida em problemas estáticos. A vantagem principal deste método é que ele é geral e aplicável a qualquer problema. Os conceitos básicos do método encontram-se no apêndice A deste trabalho.

Através da transformação da equação diferencial parcial elíptica (equação de Navier) obtem-se a equação integral.

Aplicando-se a relação dos resíduos ponderados à equação (2.6.6), tem-se que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ (C_1^2 - C_2^2) U_{i,ij} + C_2^2 U_{j,ii} + w^2 U_j + \frac{B_j}{\rho} \right\} U_j^* d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma_2} \left\{ P_j - \bar{P}_j \right\} U_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \left\{ U_j - \bar{U}_j \right\} P_j^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

onde  $U_j^*$  ( $j = 1, 2, 3$ ) é interpretado como uma função peso.

Integrando-se a equação (3.3.1) por partes duas vezes vem,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ (C_1^2 - C_2^2) U_{i,ij}^* + C_2^2 U_{j,ii}^* + w^2 U_j^* \right\} U_j d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \tilde{B}_j U_j^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_j U_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} P_j U_j^* d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_j P_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_j P_j^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

onde  $\tilde{B}_j = \frac{B_j}{\rho}$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ (C_1^2 - C_2^2) U_{i,ij}^* + C_2^2 U_{j,ii}^* + w^2 U_j^* \right\} U_j d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \tilde{B}_j U_j^* d\Omega = - \int_{\Gamma} P_j U_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma} U_j P_j^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

A equação (3.3.3) pode ainda ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \tilde{B}_j^* U_j d\Omega + \int_{\Gamma} P_j^* U_j d\Gamma = \int_{\Omega} \tilde{B}_j U_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} P_j U_j^* d\Gamma \tag{3.3.4}$$

que corresponde à identidade dinâmica de Betti-Rayleigh.

Adotando-se como as componentes das forças de volume  $\tilde{B}_j^*$ , as correspondentes a forças concentradas harmônicas de

amplitudes unitárias, aplicadas no ponto  $\xi$  de um meio infinito  $\Omega^*$  que contém  $\Omega$ , em cada uma das 3 direções ortogonais dadas pelos vetores  $e_j$  (Figura 3.2), tem-se que:

$$\tilde{B}_j^* = \delta(\xi, x) e_j \quad (3.3.5)$$

Tendo-se em vista que:

$$\int_{\Omega^*} g(x) \delta(\xi, x) d\Omega(x) = g(\xi) \quad (3.3.6)$$

Desse modo a primeira integral da equação (3.3.4) se reduz a:

$$\int_{\Omega} \tilde{B}_j^* U_j d\Omega = U_j(\xi) e_j \quad \text{desde que } \xi \in \Omega \quad (3.3.7)$$

Além do mais, adotando-se que cada carga dinâmica concentrada atue independentemente,  $U_j^*$  e  $P_j^*$  poderão ser escritos em função das soluções fundamentais apresentadas no item 3.2 da seguinte forma:

$$U_j^* = U_{ij}^* (\xi, x) P_i \quad (3.3.8)$$

$$P_j^* = P_{ij}^* (\xi, x) P_i$$



onde  $P_i = 1$

e

$U_{ij}^*$  e  $P_{ij}^*$  representam o deslocamento e a força de superfície na direção "j", no ponto "x", provocados por uma força dinâmica unitária atuando na direção "i" aplicada no ponto " $\xi$ ".

Assim, escrevendo-se a equação (3.3.4) para cada componente  $P_i$  atuando em separado, obtemos três equações da forma:

$$U_i(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) P_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}^*(\xi, x) \tilde{B}_j(x) d\Omega(x) \quad (3.3.9)$$

A equação (3.3.9) é a equivalente harmônica da Identidade de Somigliana para deslocamentos que é também equivalente, na teoria do Potencial, à Terceira Identidade de Green.

Esta equação calcula o valor dos deslocamentos  $U_i$  em um ponto qualquer interno  $\xi$ , em função dos deslocamentos e forças de superfície no contorno e da integral das forças de volume.

### 3.4 - Tensões nos Pontos Internos

As tensões internas são calculadas através da diferenciação da equação (3.3.9) em relação ao ponto fonte ( $\xi$ ) e

depois substituindo-se este valor na lei de Hooke (equação (2.2.7.1)):

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} D_{kij} P_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} U_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} \tilde{B}_k d\Omega \quad (3.4.1)$$

onde:

$$D_{kij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial U_{kl}^*}{\partial x_l} + G \left[ \frac{\partial U_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}^*}{\partial x_i} \right] \quad (3.4.2)$$

$$S_{kij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial P_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left[ \frac{\partial P_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{jk}^*}{\partial x_i} \right]$$

### 3.5 - Equação Integral no Contorno

Para o cálculo da equação integral no interior foi utilizado o método dos Resíduos Ponderados. Neste item, a equação no contorno será obtida através do limite quando o ponto  $\xi$  vai para o contorno.

A equação (3.3.9) pode ser escrita para o corpo apresentado na Figura 3.3a como ( $\xi$  não pertence a  $\Omega_\epsilon$  neste caso):

$$\int_{\Gamma + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}^*(\xi, x) P_j(x) d\Gamma(x) + \quad (3.5.1)$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon} U_{ij}^*(\xi, x) \tilde{B}_j(x) d\Omega(x)$$

uma vez que  $\int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{B}_j^*(x) U_j(x) d\Omega(x) = 0$  na equação (3.3.4).

Ao tirarmos o limite quando o ponto  $\xi$  vai para o contorno, a equação (3.5.1) passa a ser escrita (Figura 3.3.b):

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}^*(\xi, x) P_j(x) d\Gamma(x) + \quad (3.5.2)$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon} U_{ij}^*(\xi, x) \tilde{B}_j(x) d\Omega(x)$$

Fazendo-se para cada integral o limite quando  $\varepsilon$  tende a zero:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) + \quad (3.5.3)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x)$$

A primeira integral à direita poderá ser representada como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) \left[ U_j(x) - U_j(\xi) \right] d\Gamma(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ U_j(\xi) \int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right] \quad (3.5.4)$$

Devido à continuidade de  $U_j(x)$ , o primeiro limite à direita da equação acima é nulo, assim:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ U_j(\xi) \int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right] \quad (3.5.5)$$

$$\text{chamando } C_{ij}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (3.5.6)$$

tem-se que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = C_{ij}(\xi) U_j(\xi) \quad (3.5.7)$$

O desenvolvimento do limite para o cálculo de  $C_{ij}$ , encontra-se no apêndice B deste trabalho.

O limite da segunda integral da direita na equação (3.5.3) é equivalente a calcular a integral no sentido de valor principal de Cauchy.

As outras integrais não apresentam singularidades especiais podendo ser interpretadas como integrações normais.

O coeficiente  $C_{ij}$  pode ser generalizado para representar a integração de  $P_{ij}^*$  sobre a superfície parcial de uma esfera infinitesimal de raio  $\epsilon$  centrada no ponto  $\xi$ . Se a tangente no ponto  $\xi$  do contorno é contínua (contorno suave) o valor de  $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}/2$ ; se o ponto  $\xi$  é interior ao domínio, a esfera é completa e  $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$  (equação (3.3.9)) e se  $\xi$  é exterior ao domínio,  $C_{ij}(\xi) = 0$ .

Então

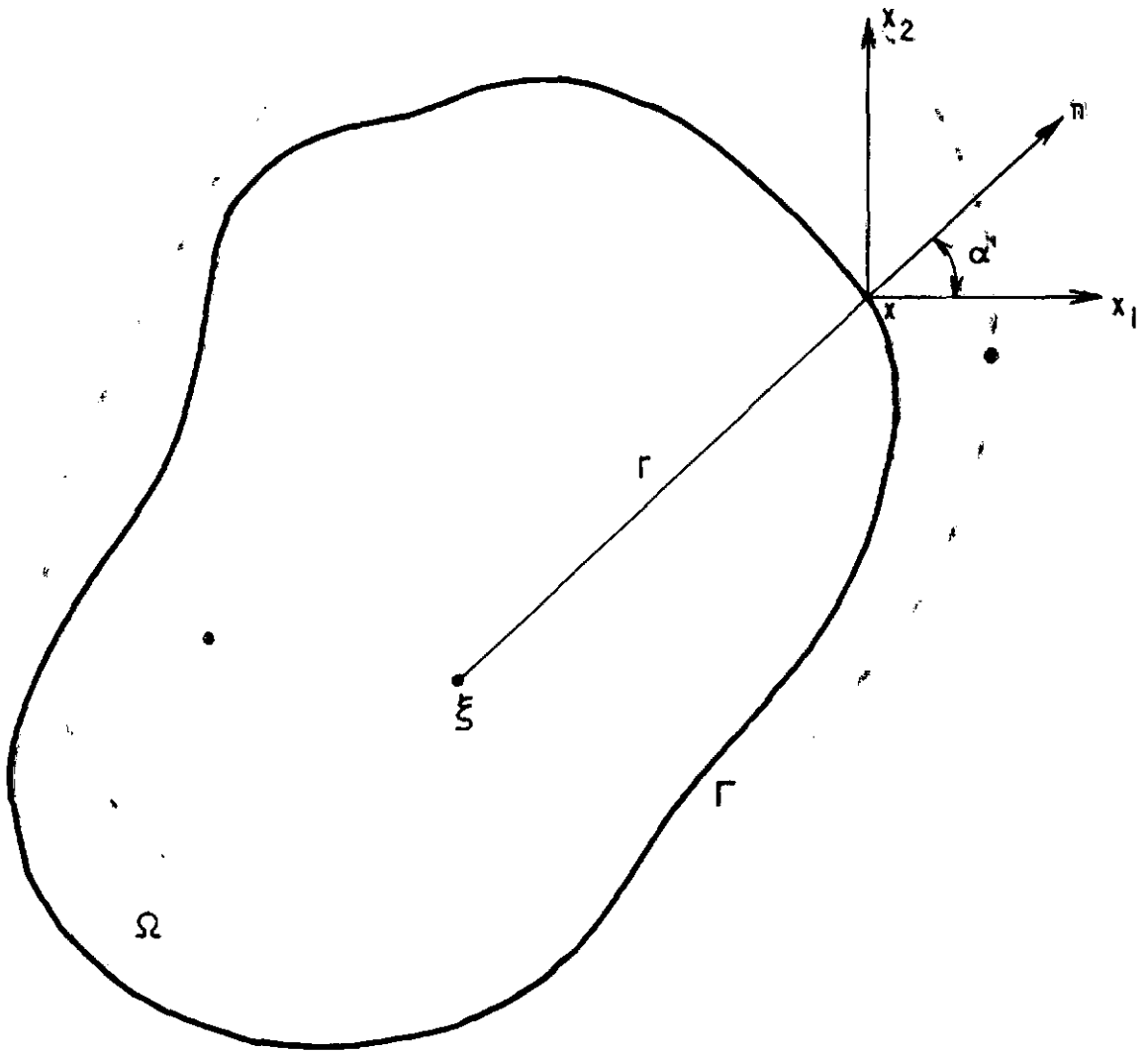
$$C_{ij}(\xi) U_j(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) =$$

$$= \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) P_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}^*(\xi, x) \tilde{B}_j(x) d\Omega(x) \quad (3.5.8)$$

$\xi \in \Gamma$

A equação acima fornece uma relação que deve ser satisfeita pelas forças de superfície e pelos deslocamentos no contorno (incluindo as forças de volume que são sempre conheci-

das). Portanto, quando as condições de contorno são aplicadas, esta equação pode ser usada para calcular as incógnitas restantes no contorno.



$x$  = ponto campo

$\xi$  = ponto fonte

FIGURA 3.1 Representação das Derivadas

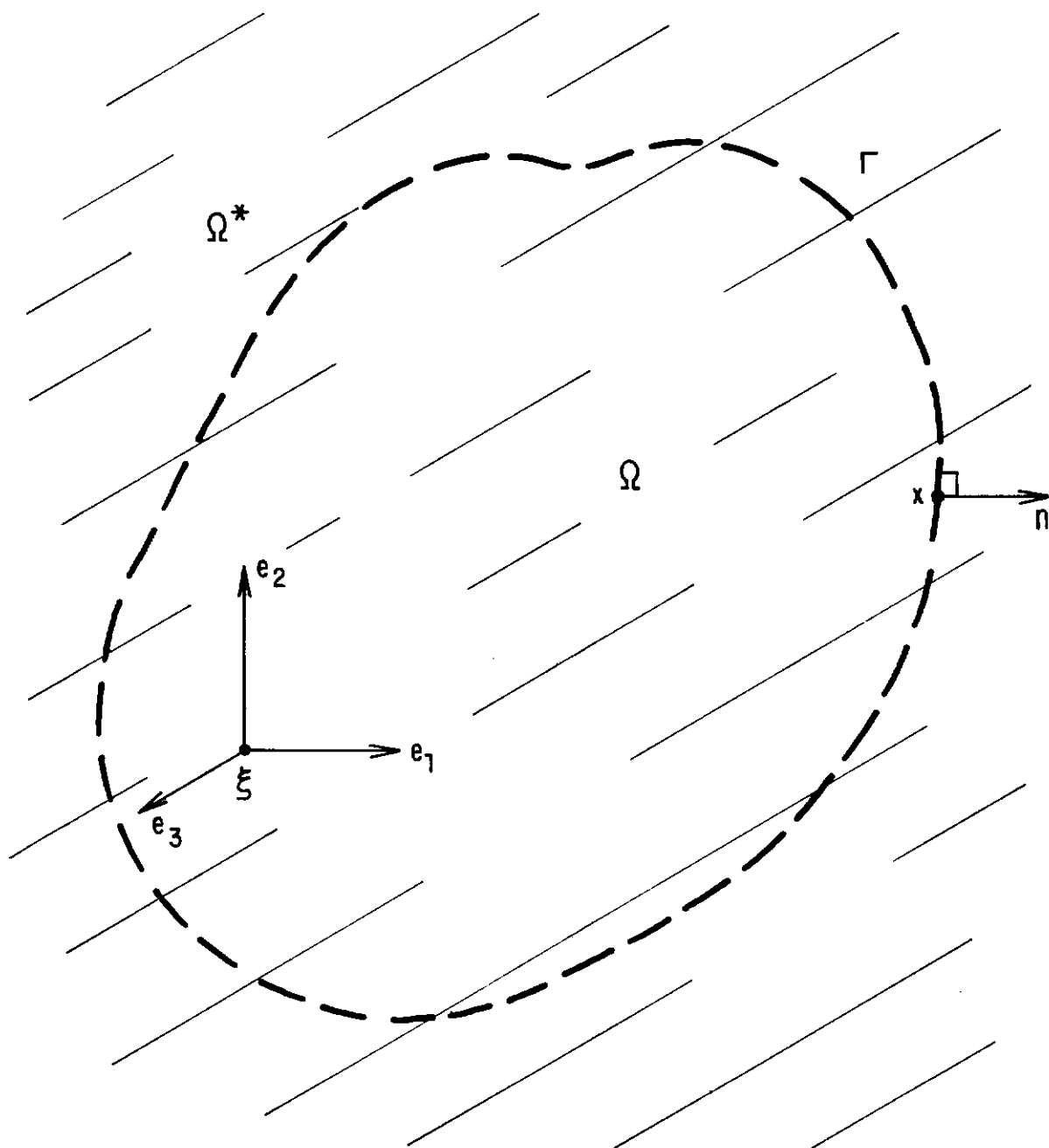


FIGURA 3.2 Forças de Volume Correspondentes a Três Cargas Unitárias Aplicadas nas Direções  $e_j$  no Ponto  $\xi$



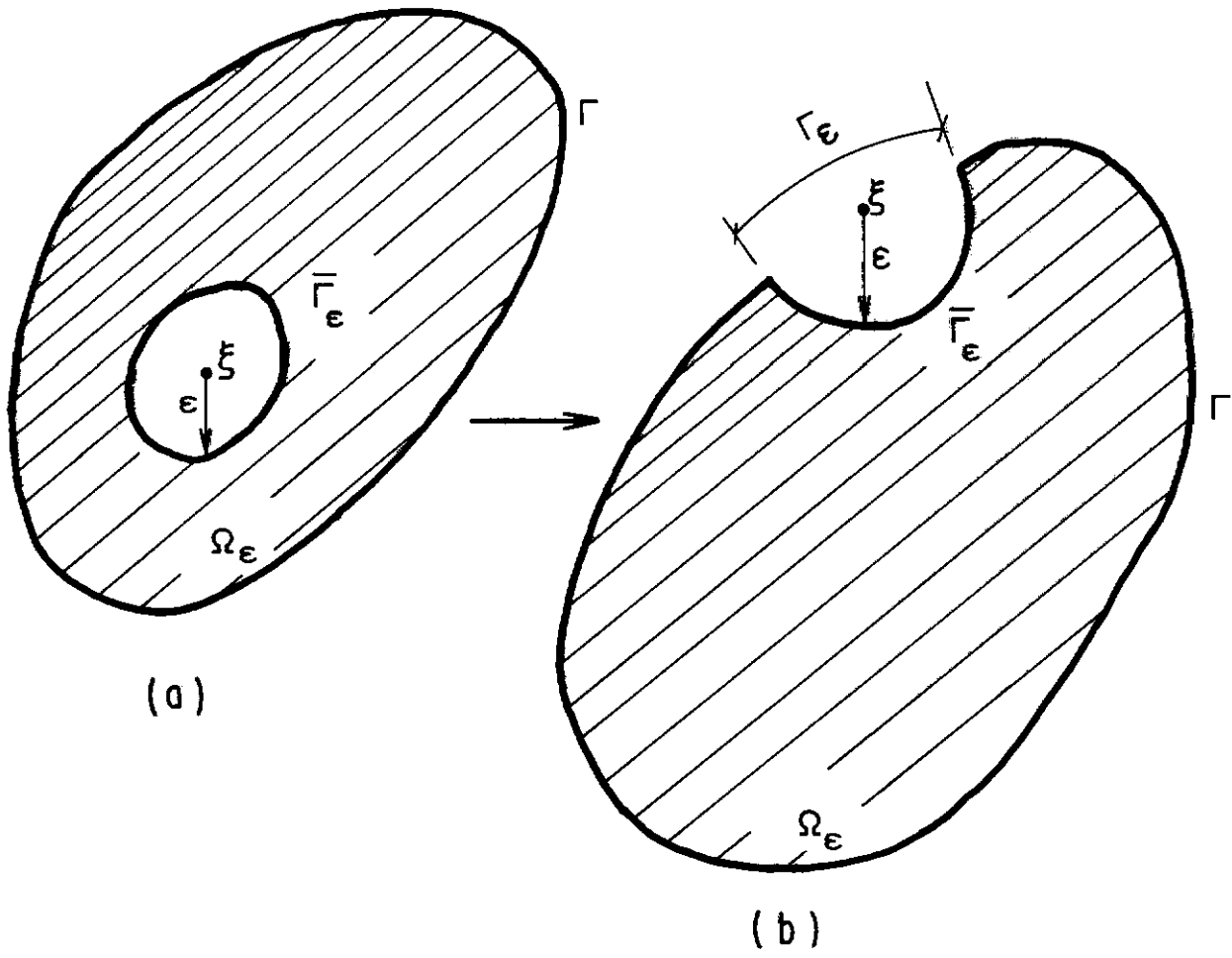


FIGURA 3.3 Representação do Corpo

## CAPÍTULO 4

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO

CAPÍTULO 4IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO4.1 - Introdução

Neste capítulo é descrito um procedimento numérico geral para a solução dos problemas de valores de contorno.

O problema agora se resume em encontrar a rotina que possibilita resolver a equação integral (3.5.8), com as condições de contorno abaixo:

$$U_j = \bar{U}_j \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \quad (4.1.1)$$

$$P_j = \bar{P}_j \quad \text{em} \quad \Gamma_2$$

Os passos principais estão descritos a seguir:

- a) o contorno  $\Gamma$  será discretizado em uma série de elementos sobre os quais  $U_j$  e  $P_j$  serão interpolados em função dos valores nodais (Figura 4.1);
- b) a equação (3.5.8) é escrita, em forma discretizada, para cada ponto nodal  $\xi$  do contorno  $\Gamma$  e as integrais são calculadas (normalmente de forma numérica) sobre cada elemento do contorno. Um sistema de  $N$  equações algébricas envolvendo  $N$  valores nodais de deslocamentos e  $N$  va-

lores nodais de forças de superfície  $\underline{\tilde{e}}$ , desta forma, obtido;

- c) as condições de contorno (equações (4.1.1)) são impostas e, conseqüentemente, N valores nodais (força de superfície ou deslocamento em cada direção por nó) são prescritos. O sistema de equações pode, então, ser resolvido para obtermos os N valores nodais incógnitos.

Os valores dos deslocamentos e tensões em quaisquer pontos internos  $\xi$  podem ser obtidos, a posteriori, empregando-se a identidade de Somigliana e suas derivadas, também de forma discretizada.

Sendo as forças de volume conhecidas, estas somente contribuem para o termo independente do sistema de equações.

Expressando-se a equação (3.5.8) em forma matricial:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{C}}(\xi) \underline{\tilde{U}}(\xi) + \int_{\Gamma} \underline{\tilde{P}}^*(\xi, x) \underline{\tilde{U}}(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \underline{\tilde{U}}^*(\xi, x) \underline{\tilde{P}}(x) d\Gamma(x) + \\ + \int_{\Omega} \underline{\tilde{U}}^*(\xi, x) \underline{\tilde{B}}(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

onde  $\underline{\tilde{U}}(\xi)$  e  $\underline{\tilde{U}}(x)$  correspondem aos vetores deslocamentos no ponto fonte  $\xi$  e no ponto campo  $x$ , respectivamente.

Sendo:

$$\underline{C}(\xi) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

$$\underline{U}(x) = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad \underline{P}(x) = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{B}}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

$$\underline{U}^*(\xi, x) = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* & U_{13}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* & U_{23}^* \\ U_{31}^* & U_{32}^* & U_{33}^* \end{bmatrix} \quad \underline{P}^*(\xi, x) = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* & P_{13}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* & P_{23}^* \\ P_{31}^* & P_{32}^* & P_{33}^* \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

onde:  $\underline{C}(\xi)$  é a matriz dos coeficientes  $C_{ij}(\xi)$

$\underline{U}(x)$  e  $\underline{P}(x)$  são os vetores deslocamentos e forças de superfície

$\underline{U}^*(\xi, x)$  e  $\underline{P}^*(\xi, x)$  são as matrizes fundamentais de deslocamentos e forças de superfície

$\underline{\tilde{B}}(x)$  é o vetor das forças de volume.

#### 4.2 - Procedimento Numérico Geral

O objetivo da discretização é a aproximação da equação integral de contorno por um sistema de equações simultâneas.

O contorno  $\Gamma$  é dividido em  $J$  elementos gerando  $N$  nós onde estão associados os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície. Ao longo de cada elemento, os deslocamentos e forças de superfície variam de acordo com as funções de interpolação, em termos dos valores nodais. Os elementos podem ser retos ou curvos. O domínio  $\Omega$  pode ser dividido em  $S$  células de geometria conhecida para a integração das forças de volume.

As coordenadas cartesianas  $\underline{x}^{(j)}$  dos pontos do contorno situados ao longo do elemento  $\Gamma_j$  são expressas em termos das funções de interpolação  $\underline{M}$  e das coordenadas nodais  $\underline{x}^{(m)}$  do elemento na forma:

$$\underline{x}^{(j)} = \underline{M} \underline{x}^{(m)} \quad (4.2.1)$$

Os deslocamentos e forças de superfície são aproximados sobre cada elemento através do uso de funções de interpolação  $\underline{N}$ :

$$\underline{U}^{(j)} = \underline{N} \underline{U}^{(n)} \quad (4.2.2)$$

$$\underline{P}^{(j)} = \underline{N} \underline{P}^{(n)} \quad (4.2.3)$$

onde  $\underline{U}^{(n)}$  e  $\underline{P}^{(n)}$  contêm os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície.

O índice  $m$  na equação (4.2.1) se refere ao número de pontos de contorno necessários para que a geometria de cada elemento de contorno seja definida, enquanto que o índice  $n$  nas

equações (4.2.2) e (4.2.3) se refere ao número de nós do contorno para o qual estão associados os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície.

Em alguns casos a integral de volume pode ser levada para o contorno a exemplo do que é feito no caso estático.

Substituindo-se as equações (4.2.2) e (4.2.3) na equação (4.1.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} \underline{C}(\xi) \underline{U}(\xi) + \sum_{j=1}^J \left( \int_{\Gamma_j} \underline{P}^* \underline{N} d\Gamma \right) \underline{U}^{(n)} - \sum_{j=1}^J \left( \int_{\Gamma_j} \underline{U}^* \underline{N} d\Gamma \right) \underline{P}^{(n)} = \\ = \sum_{L=1}^S \left( \int_{\Omega_L} \underline{U}^* \underline{\tilde{B}} d\Omega \right) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Como as funções de interpolação  $\underline{N}$  são normalmente escritas em termos de um sistema de coordenadas intrínscico  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , tem-se que:

$$d\Gamma = |J| d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.2.5)$$

$$d\Omega = |G| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3$$

onde J e G são os jacobianos da transformação para elementos de área e de volume, respectivamente.

Fazendo-se as seguintes substituições na equação (4.2.4):

$$\int_{\Gamma_j} \tilde{P}^* \tilde{N} d\Gamma = \int_{-1}^1 \tilde{P}^* \tilde{N} |\tilde{J}| d\eta_1 d\eta_2 \cong \sum_{k=1}^K |\tilde{J}|_k W_k (\tilde{P}^* \tilde{N})_k$$

$$\int_{\Gamma_j} \tilde{U}^* \tilde{N} d\Gamma = \int_{-1}^1 \tilde{U}^* \tilde{N} |\tilde{J}| d\eta_1 d\eta_2 \cong \sum_{k=1}^K |\tilde{J}|_k W_k (\tilde{U}^* \tilde{N})_k \quad (4.2.6)$$

$$\int_{\Omega_L} \tilde{U}^* \tilde{B} d\Omega = \int_{-1}^1 \tilde{U}^* \tilde{B} |\tilde{G}| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \cong \sum_{i=1}^I |\tilde{G}|_i W_i (\tilde{U}^* \tilde{B})_i$$

obtem-se que:

$$\tilde{C}(\xi_i) \tilde{U}^{(n)}(\xi_i) + \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{k=1}^K |\tilde{J}|_k W_k (\tilde{P}^* \tilde{N})_k \tilde{U}^{(n)} \right] - \quad (4.2.7)$$

$$- \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{k=1}^K |\tilde{J}|_k W_k (\tilde{U}^* \tilde{N})_k \right] \tilde{P}^{(n)} = \sum_{L=1}^S \left[ \sum_{i=1}^I |\tilde{G}|_i W_i (\tilde{U}^* \tilde{B})_i \right]$$

Esta é a equação de elementos de contorno, onde K e I são os números de pontos de integração ao longo do elemento e da célula, respectivamente e  $W_k$  e  $W_i$  os fatores de peso associados aos pontos k e i.

Nos casos normais em que  $\xi_i$  não pertence a  $\Gamma_j$ , as integrais são calculadas numericamente utilizando-se os pontos de integração. Mas, nos casos em que  $\xi_i$  pertence a  $\Gamma_j$  aparece



uma singularidade, sendo mais econômico e preciso calcular as integrais analiticamente.

Se chamarmos:

$$\begin{aligned}\hat{H}_j &= \int_{\Gamma_j} \underline{P}^* \underline{N} \, d\Gamma \\ G_j &= \int_{\Gamma_j} \underline{U}^* \underline{N} \, d\Gamma \\ \tilde{B}_L &= \int_{\Omega_L} \underline{U}^* \tilde{\underline{B}} \, d\Omega\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

teremos que:

$$\underline{C}_i \underline{U}^{(n)} + \sum_{j=1}^J \hat{H}_j \underline{U}^{(n)} - \sum_{j=1}^J G_j \underline{P}^{(n)} = \sum_{L=1}^S \bar{\underline{B}}_L\tag{4.2.9}$$

Após a aplicação da equação (4.2.9) a todos os N nós  $\xi_i$  do contorno, obtemos:

$$\underline{C} \underline{U} + \hat{\underline{H}} \underline{U} - \underline{G} \underline{P} = \bar{\underline{B}}\tag{4.2.10}$$

ou

$$(\underline{C} + \hat{\underline{H}}) \underline{U} - \underline{G} \underline{P} = \bar{\underline{B}}\tag{4.2.11}$$

onde os vetores  $\underline{U}$  e  $\underline{P}$  contêm os valores de deslocamentos e forças de superfície em todos os pontos nodais e  $\underline{\bar{B}}$  contêm a contribuição das forças de volume.

A matriz quase diagonal  $\underline{C}$  pode ser incorporada à matriz  $\underline{\hat{H}}$  para formar  $\underline{H}$ :

$$\underline{H} \underline{U} - \underline{G} \underline{P} = \underline{\bar{B}} \quad (4.2.12)$$

Após a aplicação das condições de contorno na equação (4.2.12), o sistema pode ser reordenado na forma:

$$\underline{A} \underline{Y} = \underline{f} \quad (4.2.13)$$

onde  $\underline{A}$  é uma matriz cheia e não simétrica; o vetor  $\underline{Y}$  é formado pelos valores nodais incógnitos de deslocamentos e forças de superfície, estando a contribuição dos valores prescritos (inclusive as forças de volume) incluída no vetor  $\underline{f}$ . A matriz  $\underline{A}$  pode ser montada diretamente, sem a necessidade de se passar pelas matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ .

Uma vez que todos os valores no contorno são prescritos ou calculados pela equação (4.2.13), os deslocamentos e tensões em qualquer ponto  $\xi$  do domínio  $\Omega$  podem ser calculados posteriormente utilizando-se a equação (4.2.7) para os pontos internos:

$$\begin{aligned} \underline{U}(\xi) = & - \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{k=1}^K |\underline{J}|_k \underline{W}_k (\underline{P}^* \underline{N})_k \right] \underline{U}^{(n)} + \\ & + \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{k=1}^K |\underline{J}|_k \underline{W}_k (\underline{U}^* \underline{N})_k \right] \underline{P}^{(n)} = \sum_{m=1}^S \left[ \sum_{i=1}^I |\underline{G}|_i \underline{W}_i (\underline{U}^* \underline{\tilde{B}})_i \right] \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Derivando-se a equação acima e substituindo-se os valores na lei de Hooke (equação (2.2.7.1)):

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell n}(\xi) = & - \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{k=1}^K |\underline{J}|_k \underline{W}_k (\underline{S}_{\ell n} \underline{N})_k \right] \underline{U}^{(n)} + \\ & + \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{k=1}^K |\underline{J}|_k \underline{W}_k (\underline{D}_{\ell n} \underline{N})_k \right] \underline{P}^{(n)} + \\ & + \sum_{m=1}^S \left[ \sum_{i=1}^I |\underline{G}|_i \underline{W}_i (\underline{D}_{\ell n} \underline{\tilde{B}})_i \right] \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

onde:

$$\underline{S}_{\ell n} = \begin{bmatrix} S_{1\ell n} & S_{2\ell n} & S_{3\ell n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_{\ell n} = \begin{bmatrix} D_{1\ell n} & D_{2\ell n} & D_{3\ell n} \end{bmatrix}$$

#### 4.3 - Caso Bi-dimensional com Elemento Constante

Nesta seção, as fórmulas estão adaptadas para o caso bi-dimensional com elemento constante.

As forças de volume serão negligenciadas, uma vez que estas são sempre conhecidas.

Sendo o elemento constante, os valores de deslocamentos e forças de superfície não variam ao longo do elemento  $\Gamma_j$ , sendo iguais aos valores nos nós (figura 4.2).

Para tal caso as fórmulas são as seguintes:

#### 4.3.1 - Coordenadas Cartesianas

$$\underline{x}^{(j)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_j = \underline{M} \underline{x}^{(m)} = \begin{bmatrix} \underline{I} & N_1 & \underline{I} & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_1^j \\ x_2^j \end{Bmatrix} \quad (4.3.1.1)$$

onde:  $\underline{I}$  é a matriz identidade de ordem dois

$N_1$  e  $N_2$  são as funções de interpolação dadas

$$\text{por: } N_1 = \frac{1}{2} (1 - \eta) \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{1}{2} (1 + \eta) \quad (4.3.1.2)$$

#### 4.3.2 - Deslocamentos e Forças de Superfície

$$\underline{U}^{(j)} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}_j = \underline{N} \underline{U}^{(n)} = \underline{I} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (4.3.2.1)$$

$$\underline{P}^{(j)} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}_j = \underline{N} \underline{P}^{(n)} = \underline{I} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (4.3.2.2)$$

onde  $\underline{u}^{(j)}$  e  $\underline{p}^{(j)}$  são respectivamente, os vetores deslocamentos e forças de superfície no ponto  $j$  com componentes nas direções  $x_1$  e  $x_2$ .

#### 4.3.3 - Equação no Contorno

A equação (4.2.4) pode ser escrita para este caso como:

$$\underline{C}(\xi) \underline{u}^{(n)} + \sum_{j=1}^J \left( \int_{\Gamma_j} \underline{P}^* \underline{N} d\Gamma \right) \underline{u}^{(n)} = \sum_{j=1}^J \left( \int_{\Gamma_j} \underline{U}^* \underline{N} d\Gamma \right) \underline{p}^{(n)} \quad (4.3.3.1)$$

onde as matrizes fundamentais são:

$$\underline{U}^* = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix} \quad \underline{P}^* = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \quad (4.3.3.2)$$

$$\underline{C}(\xi) = \frac{1}{2} \underline{I} \quad \underline{N} = \underline{I} \quad (4.3.3.3)$$

#### 4.3.4 - Integração Numérica

Quando o ponto  $\xi_1$  não pertence a  $\Gamma_j$ , o cálculo numérico das integrais  $\underline{G}_j$  e  $\underline{\hat{H}}_j$  é efetuado utilizando-se a integração tipo Gauss.

$$\text{Como } d\Gamma = |\underline{J}| d\eta \quad (4.3.4.1)$$

e sendo o jacobiano da transformação:

$$|\tilde{J}| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} = \frac{\ell}{2} \quad (4.3.4.2)$$

Então:

$$\hat{H}_j = \int_{\Gamma_j} \tilde{P}^* \tilde{N} d\Gamma = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \tilde{P}^* \tilde{I} d\eta = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \tilde{P}^* d\eta \cong \frac{\ell}{2} \sum_{k=1}^K \tilde{W}_k \tilde{P}_k^* \quad (4.3.4.3)$$

$$G_j = \int_{\Gamma_j} \tilde{U}^* \tilde{N} d\Gamma = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \tilde{U}^* \tilde{I} d\eta = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \tilde{U}^* d\eta \cong \frac{\ell}{2} \sum_{k=1}^K \tilde{W}_k \tilde{U}_k^* \quad (4.3.4.4)$$

Os valores  $\tilde{P}_k^*$  e  $\tilde{U}_k^*$  são fornecidos por  $P_{ij}^*$  e  $U_{ij}^*$ . Estes valores são expressos em termos das funções modificadas de Bessel da segunda classe com argumentos complexos  $K_0(z)$ ,  $K_1(z)$  e  $K_2(z)$  e suas derivadas. Os argumentos  $z$  são  $iwr/C_1$  e  $iwr/C_2$ , onde  $r$  é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

Utilizando-se as fórmulas de recorrência, equações (C.41), todos os valores das funções modificadas de Bessel da segunda classe com argumentos complexos podem ser obtidos dos valores de  $K_0(z)$  e  $K_1(z)$ .

As derivadas das funções são calculadas através da equação (C.42):

$$\frac{d\psi}{dr} = - \frac{i\omega}{C_2} \left[ K_1 \left( \frac{i\omega r}{C_2} \right) - \frac{1}{r} \left[ K_2 \left( \frac{i\omega r}{C_2} \right) - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 K_2 \left( \frac{i\omega r}{C_1} \right) \right] \right] \quad (4.3.4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dr} = & - \frac{i\omega}{C_2} \left[ K_1 \left( \frac{i\omega r}{C_2} \right) - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^3 K_1 \left( \frac{i\omega r}{C_1} \right) \right] - \\ & - \frac{2}{r} \left[ K_2 \left( \frac{i\omega r}{C_2} \right) - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 K_2 \left( \frac{i\omega r}{C_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3.4.6)$$

Os valores de  $K_0(z)$  e  $K_1(z)$  são obtidos pelas expansões em série destas funções (equação (C.33)).

#### 4.3.5 - Integração Analítica

As funções modificadas de Bessel da segunda classe são funções que apresentam uma singularidade quando  $r \rightarrow 0$ , assim as integrais  $\underline{G}_j$  e  $\underline{\hat{H}}_j$  tornam-se singulares quando  $\xi_1$  pertence a  $\Gamma_j$ , devendo ser interpretadas no sentido de valor principal de Cauchy.

No entanto, neste caso, a integral  $\underline{\hat{H}}_j$  é nula devido à ortogonalidade entre  $r$  e  $n$ . Dessa forma:

$$\underline{\hat{H}}_j = \int_{\Gamma_j} \underline{P}^* \underline{N} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \underline{P}^* \, d\Gamma = 0 \quad (4.3.5.1)$$

Consequentemente somente a integral  $\underline{G}_j$  necessita ser calculada. Retornando a notação cartesiana (figura 4.3):

$$G_{ij} = \int_{(1)}^{(2)} U^*_{ij} d\Gamma = 2 \int_0^R U^*_{ij} dr \quad (4.3.5.2)$$

onde ( ) indica que os números entre parênteses se referem ao número do ponto e não à distância.

$$\text{Como } U^*_{ij} = \frac{1}{2\pi G} \left\{ \psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (4.3.5.3)$$

Substituindo-se este valor na equação (4.3.5.2):

$$G_{ij} = \frac{1}{\pi G} \int_0^R \left\{ \psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j} \right\} dr \quad (4.3.5.4)$$

onde  $\psi$  e  $\chi$  são funções de  $K_0(z)$ ,  $K_1(z)$  e  $K_2(z)$ .

Então:

$$\int_0^R \psi dr = \int_0^R K_0(z_2) dr + \left[ \int_0^R \frac{1}{z} K_1(z_2) dr - \frac{C_2}{C_1} \int_0^R \frac{1}{z} K_1(z_1) dr \right] \quad (4.3.5.5)$$

$$\int_0^R \chi dr = \int_0^R K_2(z_2) dr - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 \int_0^R K_2(z_1) dr \quad (4.3.5.6)$$

$$\text{onde } z_1 = \frac{iwr}{C_1} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{iwr}{C_2} \quad (4.3.5.7)$$



Mas:

$$K_1(z) = -z \left[ K_0(z) + K_1'(z) \right] \quad (4.3.5.8)$$

$$K_2(z) = -\frac{2}{z} \left[ K_1(z) + K_0(z) \right] \quad (4.3.5.9)$$

Assim:

$$\int_0^R \frac{1}{z} K_1(z) dr = - \left\{ \int_0^R K_0(z) dr + \frac{C}{iw} \left[ K_1(z) - K_1(0) \right] \right\} \quad (4.3.5.10)$$

$$\int_0^R K_2(z) dr = -2 \int_0^R \frac{1}{z} K_1(z) dr + \int_0^R K_0(z) dr \quad (4.3.5.11)$$

$$\text{onde } z = \frac{iwr}{C} \text{ e } z = \frac{iwR}{C} \quad (4.3.5.12)$$

Mas:

$$\int_0^R K_0(z) dr = \frac{C}{iw} \int_0^Z K_0(z) dz \quad (4.3.5.13)$$

onde:

$$\begin{aligned} \int_0^Z K_0(z) dz = & Z \left\{ \left[ 1 - \gamma - \ln \frac{Z}{2} \right] + \frac{0,25Z^2}{(1!)^2 3} \left[ 1 + \frac{1}{3} - \gamma - \ln \frac{Z}{2} \right] + \right. \\ & + \frac{(0,25Z^2)^2}{(2!)^2 5} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \gamma - \ln \frac{Z}{2} \right] + \dots + \\ & \left. + \frac{(0,25Z^2)^n}{(n!)^2 (2n+1)} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} - \gamma - \ln \frac{Z}{2} \right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.3.5.14)$$

Assim:

$$G_{ij} = \frac{1}{\pi G} \left[ \left( \int_0^R \psi dr \right) \delta_{ij} - \left( \int_0^R \chi dr \right) r_{,i} r_{,j} \right] \quad (4.3.5.15)$$

onde  $i, j = 1, 2$

$$\int_0^R \psi dr = \left[ \frac{C_2}{C_1} \right]^2 \int_0^R K_0(z_1) dr - \frac{C_2}{iw} \left[ K_1(z_2) - \left[ \frac{C_2}{C_1} \right] K_1(z_1) \right] \quad (4.3.5.16)$$

$$\int_0^R \chi dr = \left[ \frac{C_2}{C_1} \right]^2 \int_0^R K_0(z_1) dr - \int_0^R K_0(z_2) dr - \quad (4.3.5.17)$$

$$- \frac{2C_2}{iw} \left[ K_1(z_2) - \frac{C_2}{C_1} K_1(z_1) \right]$$

$$\text{onde: } z_1 = \frac{iwr}{C_1} \quad z_2 = \frac{iwr}{C_2} \quad (4.3.5.18)$$

$$Z_1 = \frac{iwR}{C_1} \quad Z_2 = \frac{iwR}{C_2} \quad (4.3.5.19)$$

#### 4.3.6 - Soluções Para Pontos Internos

As componentes dos tensores de deslocamentos e de tensões internas são dadas por:

$$U_i(\xi) = \sum_{n=1}^N P_j^n G_{ij} - \sum_{n=1}^N U_j^n \hat{H}_{ij} \quad (4.3.6.1)$$

$$\sigma_{ij}(\xi) = - \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{m=1}^M (W_m S_{kij})_m \right] U_k^n + \quad (4.3.6.2)$$

$$+ \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{m=1}^M (W_m D_{kij})_m \right] P_k^n$$

onde M é o número de pontos de integração ao longo de cada elemento e os tensores de terceira ordem são:

$$D_{kij} = - \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ \left( \frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right) \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} \right) - \left( \frac{C_1}{C_2} \right)^2 \frac{\chi}{r} \right] r_{,k} \delta_{ij} + \right. \\ \left. + \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) r_{,i} \delta_{jk} + \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) r_{,j} \delta_{ik} - 2 \left( \frac{d\chi}{dr} - \frac{2\chi}{r} \right) r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\}$$

e

$$S_{kij} = - \frac{G}{2\pi} \left\{ \left[ \left( \frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right) \left[ \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \left( \frac{C_1^2}{C_2^2} + 2 \right) - \frac{2}{r} \left( \frac{C_1}{C_2} \right)^2 \frac{d\chi}{dr} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right) \left( \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{d^2\chi}{dr^2} \right) \right] + \left[ 1 - \frac{C_1^2}{C_2^2} \right] \frac{4\chi}{r^2} \right\} n_k + \\ + r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ 2 \left( \frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right) \left[ \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} - 2 \frac{d^2\chi}{dr^2} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{r} \left[ \left[ \left( \frac{C_1}{C_2} \right)^2 \frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr} \right] \right] \delta_{ij} + \\
& + \left[ \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{6\chi}{r^2} - \frac{3}{r} \frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right] \left[ \frac{\partial r}{\partial n} (r_{,j} \delta_{ik} + r_{,i} \delta_{jk}) + \right. \\
& + r_{,j} r_{,k} n_i + r_{,i} r_{,k} n_j \left. \right] + \frac{2}{r} \left[ \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right] (n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) + \\
& + r_{,i} r_{,j} n_k \left\{ \frac{4}{r} \left[ \left( \frac{C_1}{C_2} \right)^2 \frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr} \right] + 2 \left[ \left( \frac{C_1}{C_2} \right)^2 - 2 \right] \left[ \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{d^2\chi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right] \right\} + \\
& + 4 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \left[ \frac{5}{r} \frac{d\chi}{dr} - \frac{d^2\chi}{dr^2} - \frac{7\chi}{r^2} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.3.6.4)
\end{aligned}$$

onde  $i, j, k = 1, 2$ .

Nos tensores de terceira ordem, as derivadas segunda das funções  $\psi$  e  $\chi$  podem ser calculadas dos valores das funções modificadas de Bessel da segunda classe das duas primeiras ordens, utilizando-se as equações (C.42) e (C.43).

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = - \frac{w^2}{2C_2^2} \left[ K_0'' \left( \frac{iwr}{C_2} \right) + K_2'' \left( \frac{iwr}{C_2} \right) - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^4 \left[ - K_0'' \left( \frac{iwr}{C_2} \right) + K_2'' \left( \frac{iwr}{C_1} \right) \right] \right] \quad (4.3.6.5)$$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} = - \frac{w^2}{C_2^2} \left[ K_2'' \left( \frac{iwr}{C_2} \right) - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^4 K_2'' \left( \frac{iwr}{C_1} \right) \right] \quad (4.3.6.6)$$

onde:

$$K_\nu''(z) = \frac{1}{4} \left[ K_{\nu-1}(z) + 2K_\nu(z) + K_{\nu+2}(z) \right] \quad (4.3.6.7)$$

$$K_0''(z) = \frac{1}{2} \left[ K_0(z) + K_2(z) \right] \quad (4.3.6.8)$$

$$K_1''(z) = \frac{1}{4} \left[ 3K_1(z) + K_3(z) \right] \quad (4.3.6.9)$$

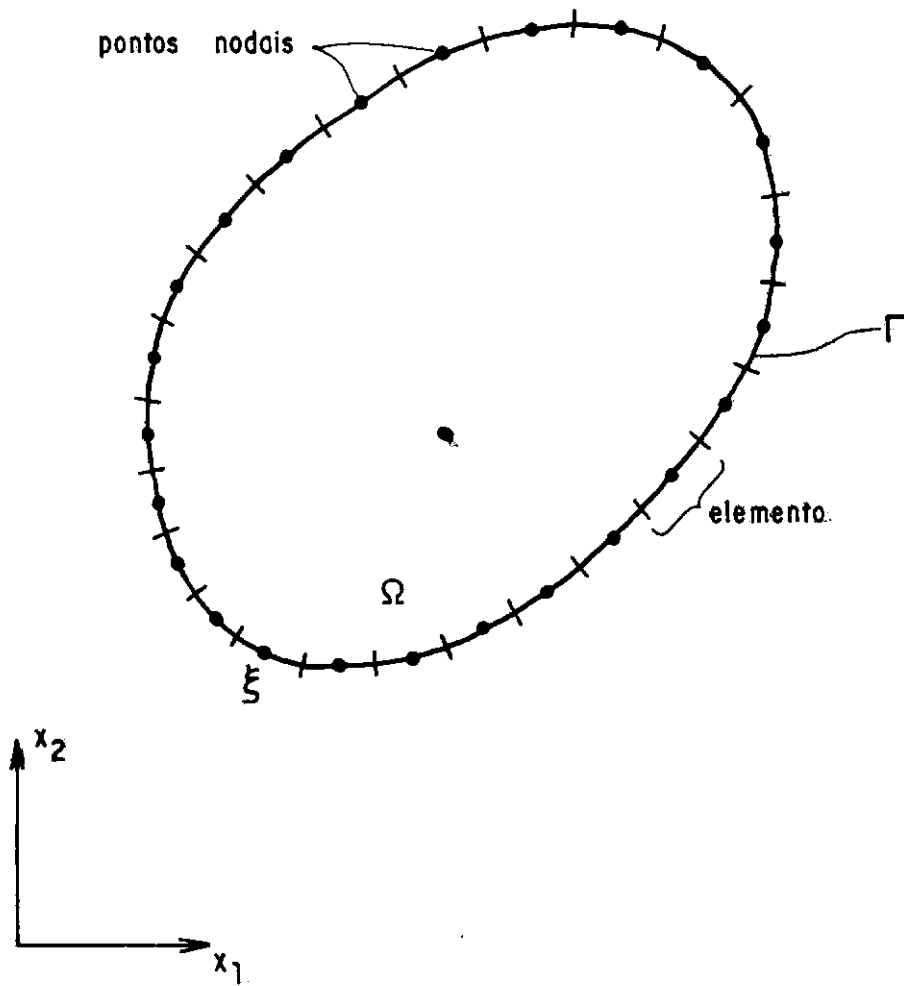


FIGURA 4.1 Discretização do Contorno  $\Gamma$

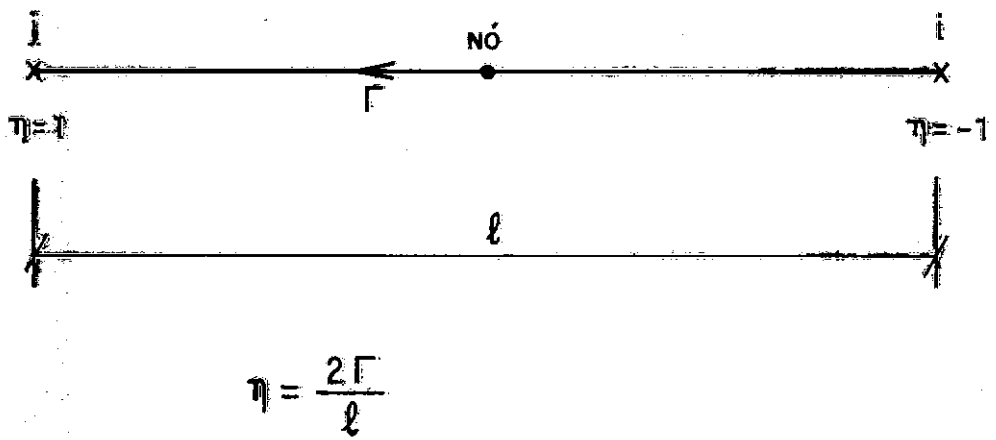


FIGURA 4.2 Representação do Elemento

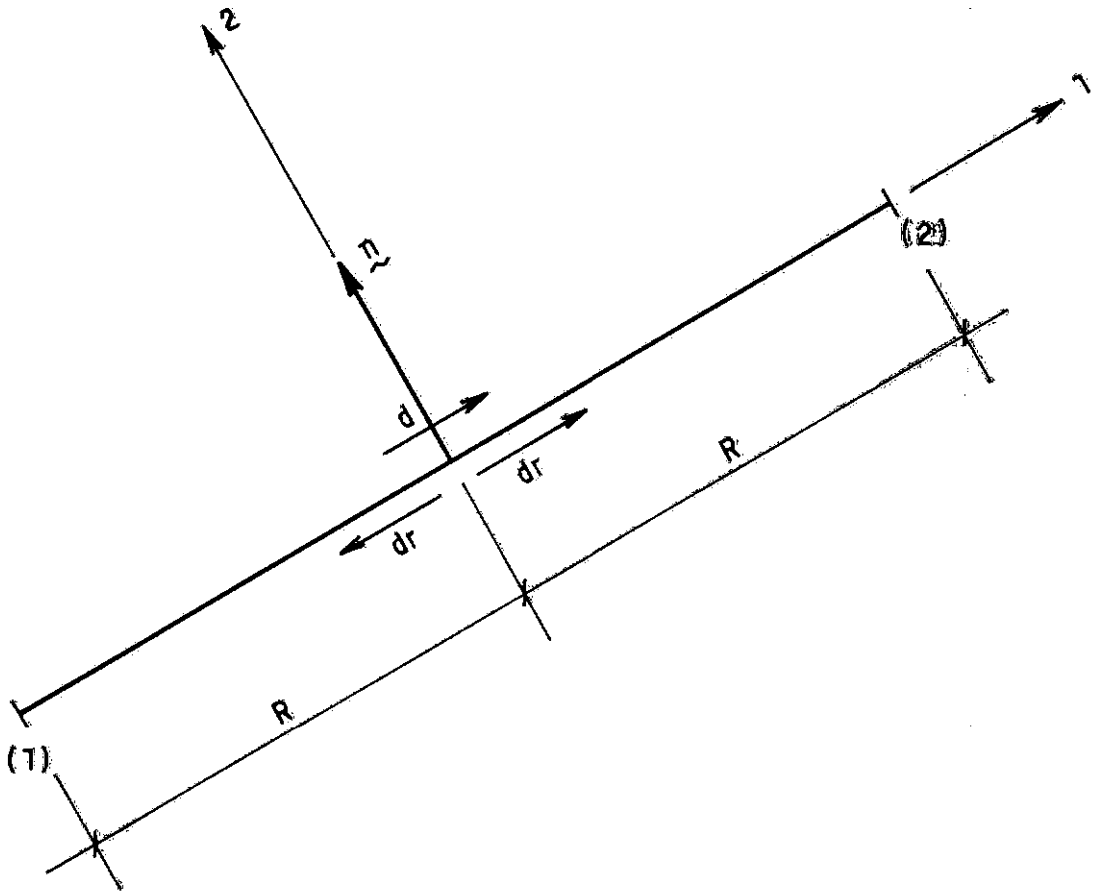


FIGURA 4.3 Representação do Elemento



## CAPÍTULO 5

COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÕES ESTÁTICAS E SOLUÇÕES

DINÂMICAS A BAIXAS FREQUÊNCIAS

## CAPÍTULO 5

### COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÕES ESTÁTICAS E SOLUÇÕES

#### DINÂMICAS A BAIXAS FREQUÊNCIAS

Este capítulo abrange a comparação entre soluções estáticas e soluções dinâmicas a baixas frequências. Tais comparações serão efetuadas para o caso bi-dimensional e para o caso tri-dimensional.

#### 5.1 - Caso Tri-dimensional

Consideremos a solução fundamental tri-dimensional. O deslocamento  $U_{ij}^*$  depende das funções  $\psi$  e  $\chi$ . Estas funções estão expressas em termos de exponenciais na equação (3.2.1.9). Se os exponenciais forem substituídos por uma expansão em série, ambas funções se transformam em:

$$\psi = \frac{1}{2r} \left[ 1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} \right] + k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} \left[ 1 + \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^{n+3} \right] \frac{(k_2 r)^n}{n!} \quad (5.1.1)$$

$$\chi = -\frac{1}{2r} \left[ 1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \right] + k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+3)} \left[ 1 - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^{n+3} \right] \frac{(k_2 r)^n}{n!} \quad (5.1.2)$$

sendo  $k_2 = iw/C_2$

Substituindo-se as expressões acima na equação (3.2.17), obtemos:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{\alpha \pi \rho C_2^2} \left[ \frac{1}{2r} \left( 1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) + k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} \left[ 1 + \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^{n+3} \right] \frac{(k_2 r)^n}{n!} \delta_{ij} - \right. \\ \left. - \left[ -\frac{1}{2r} \left( 1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) + k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+3)} \left[ 1 - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^{n+3} \right] \frac{(k_2 r)^n}{n!} r_{,i} r_{,j} \right] \right] \quad (5.1.3)$$

Utilizando-se uma outra notação, teremos:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{\alpha \pi \rho C_2^2} \left[ \left[ \frac{1}{2r} \left( 1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) + 0(k_2) \right] \delta_{ij} - \right. \\ \left. - \left[ -\frac{1}{2r} \left( 1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) + 0(k_2) \right] r_{,i} r_{,j} \right] \quad (5.1.4)$$

Para baixas frequências, isto é, quando  $k_2$  tende a zero, o valor de  $0(k_2)$  também tende a zero, então.

$$U_{ij}^* = \frac{1}{\alpha \pi \rho C_2^2} \left[ \frac{1}{2r} \left( 1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{2r} \left( 1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) r_{,i} r_{,j} \right] \quad (5.1.5)$$

Substituindo-se os valores de  $\alpha$ ,  $C_1$  e  $C_2$ , obtemos a expressão para o caso estático:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \frac{1}{r} \left[ (3-4\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (5.1.6)$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio para as forças de superfície, estas podem ser expressas como:

$$P_{ij}^* = \frac{1}{4\pi} \left\{ A \left( \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ij} + r_{,j} n_{,i} \right) + r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} B + r_{,i} n_{,j} D \right\} \quad (5.1.7)$$

onde:

$$A = \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \quad (5.1.8)$$

$$B = \frac{4\chi}{r} - 2 \frac{d\chi}{dr} \quad (5.1.9)$$

$$D = \left( \frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right) \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\alpha\chi}{2r} \right) - \frac{2\chi}{r} \quad (5.1.10)$$

Substituindo-se os exponenciais das funções  $\psi$  e  $\chi$  por expansões em séries, as expressões acima se transformam em:

$$A = -\frac{1}{r^2} \frac{C_2^2}{C_1^2} + k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(n+2)(n+4)} \frac{[1 + (C_2/C_1)^4]}{(n+4)} \frac{(k_2 r)^n}{n!} \quad (5.1.11)$$

$$B = -\frac{3}{r^2} \left( 1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) - k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-2)(n^2 + 5n + 9)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \left[ 1 - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^4 \right] \frac{(k_2 r)^n}{n!} \quad (5.1.12)$$

$$D = \frac{1}{r^2} \frac{C_2^2}{C_1^2} + k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(C_1/C_2)^2 - 2]n - (C_1/C_2)^2 [1 - (C_2/C_1)^{n+4}]}{(n+2)(n+4)} \frac{(k_2 r)^n}{n!} \quad (5.1.13)$$

As equações (5.1.11), (5.1.12) e (5.1.13) podem ser escritas como:

$$A = -\frac{1}{r^2} \frac{C_2^2}{C_1^2} + 0 (k_2^2) \quad (5.1.14)$$

$$B = - \frac{3}{r^2} \left( 1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) + 0 \quad (k_2^2) \quad (5.1.15)$$

$$D = \frac{1}{r^2} \frac{C_2^2}{C_1^2} + 0 \quad (k_2^2) \quad (5.1.16)$$

A baixas frequências, isto é, quando  $k_2$  tende a zero, o valor de  $0 \quad (k_2^2)$  também tende a zero. Assim, substituindo-se as equações (5.1.14), (5.1.15) e (5.1.16) na equação (5.1.7), teremos a expressão para o caso estático:

$$P_{ij}^* = - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 3 r_{,i} r_{,j} \right] + (1-2\nu) (n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (5.1.17)$$

## 5.2 - Caso Bi-dimensional

Consideremos o caso das soluções fundamentais bi-dimensionais. As funções  $\psi$  e  $\chi$ , neste caso, dependem das funções modificadas de Bessel. Tais funções podem ser expandidas numa série crescente:

$$\begin{aligned} \psi = & - \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{z_2}{2} \right) + \frac{C_2^2}{C_1^2} \ln \left( \frac{z_1}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \gamma \left( 1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(z_2^2/4)^n}{n! (n+1)!} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

$$\chi = -\frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(z_2^2/4)^n}{n! (n+1)!} \quad (5.2.2)$$

onde:

$$z_2 = k_2 r \quad (5.2.3)$$

$$z_1 = k_1 r \quad (5.2.4)$$

$$A_n = C_{1n} \ln(z_2) + C_{2n} \ln(z_1) + C_{3n} \quad (5.2.5)$$

$$B_n = C_{4n} \ln(z_2) + C_{5n} \ln(z_1) + C_{6n} \quad (5.2.6)$$

sendo  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$ ,  $C_{3n}$ ,  $C_{4n}$ ,  $C_{5n}$  e  $C_{6n}$  coeficientes numéricos.

As equações (5.2.1) e (5.2.2) podem ainda ser escritas como:

$$\begin{aligned} \psi = & -\frac{1}{4(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \left[ \ln(r) + \ln\left(\frac{i\omega}{2}\right) + \gamma \right] - \frac{1}{2} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \ln(C_2) + (C_2/C_1)^2 \ln(C_1) \right] + 0(z_2^2 \ln(z_2)) = \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$= -\frac{(3-4\nu)}{4(1-\nu)} \ln(r) + E_w + 0(z_2^2 \ln(z_2))$$

$$\chi = -\frac{1}{4(1-\nu)} + 0(z_2^2 \ln(z_2)) \quad (5.2.8)$$

Para baixas frequências, isto é, quando  $z_2$  tende a zero, o valor de  $0 (z_2^2 \ln(z_2))$  também tende a zero. Assim, substituindo-se as equações (5.2.7) e (5.2.8) na equação (3.2.17), obtemos o mesmo valor do caso estático, acrescido do coeficiente  $E_w$  (este coeficiente depende da frequência tendo uma singularidade de logarítmica em  $w = 0$ ):

$$U_{ij}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[ (3-4\nu) \ln \left( \frac{1}{r} \right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] + E_w \quad (5.2.9)$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio para as forças de superfície, as expressões A, B e D podem ser expressas quando  $z_2 \rightarrow 0$ , como:

$$A = - \frac{1}{r} \frac{C_2^2}{C_1^2} + 0 (k_2 z_2 \ln(z_2)) \quad (5.2.10)$$

$$B = - \frac{2}{r} \left( 1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) + 0 (k_2 z_2 \ln(z_2)) \quad (5.2.11)$$

$$D = \frac{1}{r} \frac{C_2^2}{C_1^2} + 0 (k_2 z_2 \ln(z_2)) \quad (5.2.12)$$

Substituindo-se as expressões (5.2.10), (5.2.11) e (5.2.12) na equação (3.2.1.8), quando  $z_2$  tende a zero, obtemos a mesma equação do caso estático:

$$P_{ij}^* = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j} \right] + \right. \\ \left. + (1-2\nu) \left[ n_i r_{,j} - n_j r_{,i} \right] \right\} \quad (5.2.13)$$

Com a análise feita, podemos concluir que as soluções fundamentais dinâmicas se aproximam do equilíbrio estático para os problemas bi e tri-dimensionais, quando a frequência tende a zero. Entretanto, existem diferenças importantes nestes dois casos. Nas soluções dinâmicas tri-dimensionais a frequência pode ser nula, enquanto que no caso bi-dimensional tal fato não é possível devido a ocorrência de singularidade neste ponto. Outras diferenças podem ser constatadas no caso bi-dimensional: os termos abandonados não tendem a zero com  $k_2$ , mas com  $z_2 = k_2 r$ ; e uma constante é adicionada na representação do deslocamento.



## CAPÍTULO 6

### DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

## CAPÍTULO 6

### DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

#### 6.1 - Introdução

A teoria apresentada nos capítulos anteriores foi implementada para o desenvolvimento de um programa de computador na linguagem FORTRAN, utilizando-se o computador Burroughs 6700.

Este capítulo fornece a estrutura do programa principal bem como a descrição das subrotinas e funções utilizados.

#### 6.2 - Estrutura do Programa Principal

O programa principal é composto de 8 subrotinas, estando o seu fluxograma representado na Figura 6.1.

#### 6.3 - Descrição das Sub-rotinas

6.3.1 - DADOS: lê todos os dados necessários ao problema e calcula as velocidades de propagação  $C_1$  e  $C_2$  através das equações (2.3.11) e (2.3.12).

6.3.2 - FORM: forma as matrizes  $\hat{H}$  e  $\underline{G}$  e monta a matriz  $\underline{A}$  diretamente, bem como o vetor  $\underline{VD}$  que irá formar o vetor  $\underline{F}$  do sistema. Alguns coeficientes de  $\underline{A}$  foram multiplicados pelo módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) para que todos os coeficientes tivessem a mesma ordem de grandeza. Este procedimento evita erros numéricos.

Para o cálculo da matriz  $\underline{A}$  foram utilizadas as seguintes subrotinas:

6.3.2.1 - NDIAG: calcula as matrizes  $\hat{H}_j$  e  $G_j$  para pontos que não pertencem ao elemento, utilizando-se a integração numérica - integração de Gauss. As fórmulas utilizadas nesta subrotina são as fórmulas apresentadas na seção 4.3.4.

Para a escolha do número de pontos de integração foi utilizada a variável SEL, definida por (ver Figura 6.2):

$$SEL = d/COMPR \quad (6.3.2.1.1)$$

A medida que o ponto vai se aproximando do elemento, necessita-se de um número maior de pontos de integração. Assim a variável SEL realiza este controle.

Então:

$SEL \leq 1,5 \quad \rightarrow 10$  pontos de integração

$1,5 < SEL \leq 5,5 \rightarrow 8$  pontos de integração

$5,5 < SEL \quad \rightarrow 6$  pontos de integração

Os valores para d e COMPR são:

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{(2x_p - x_2 - x_1)^2 + (2y_p - y_2 - y_1)^2} \quad (6.3.2.1.1)$$

$$\text{COMPR} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (6.3.2.1.1)$$

6.3.2.2 - DIAG: calcula a matriz  $\underline{G}_j$  para pontos pertencentes ao elemento, utilizando-se a integração analítica. As fórmulas utilizadas nesta subrotina são as fórmulas apresentadas na seção 4.3.5.

6.3.3 - RESOL: subrotina "standard" utilizada para resolver o sistema de equações  $\underline{A} \underline{Y} = \underline{f}$ , utilizando o método de eliminação de Gauss.

6.3.4 - INTER: calcula os valores dos deslocamentos e tensões internas, utilizando as equações (4.3.6.1) e (4.3.6.2).

6.3.4.1 - COEF: calcula os valores das matrizes  $\underline{S}$  e  $\underline{D}$  através das equações (4.3.6.3) e (4.3.6.4). As integrais são desenvolvidas utilizando-se a integração de Gauss.

6.3.5 - RESP: imprime os deslocamentos e forças de superfície no contorno, juntamente com os deslocamentos e tensões nos pontos internos. Estes resultados são impressos de três modos: na forma complexa, em módulo e fase.

## 6.4 - Funções

### 6.4.1 - Funções Simples

6.4.1.1 - FMOD(X): calcula o valor do módulo do número complexo. Este módulo é calculado da seguinte maneira:

seja  $X = A + Bi$

$$F\text{MOD}(X) = \sqrt{(\text{REAL}(X))^2 + (\text{AIMAG}(X))^2} \quad (6.4.1.1.1)$$

onde: REAL : parte real (=A)

AIMAG: parte imaginária (=B)

6.4.1.2 - FASE(X): calcula o valor da fase do número complexo. Se a parte real do número complexo é nula, o valor da sua fase é  $\pi/2$ ; caso contrário, o valor da fase é dado por:

$$F\text{ASE}(X) = \text{tg} \frac{\text{AIMAG}(X)}{\text{REAL}(X)} \quad (6.4.1.2.1)$$

## 6.4.2 - Funções Complexas

6.4.2.1 - BK(M, Z): calcula os valores das funções modificadas de Bessel de segunda classe de ordem zero e de ordem um através das expansões em série fornecidas pela equação (C.33). As expansões em série foram utilizadas, uma vez que não há expansão polinomial para argumento complexo.

Com os valores calculados para  $K_0$  e  $K_1$  e utilizando-se a relação de recorrência dada pela equação (C.41), obtemos todos os valores necessários das funções modificadas de Bessel de segunda classe.

6.4.2.2 - IKO(Z, R): calcula a integral da função modificada de Bessel da segunda classe de ordem zero em relação a va

riável  $r$ , esta variando de zero a  $R$ . Esta integral é fornecida pela equação (4.3.5.14), onde  $Z$  é o argumento  $wR/C$ .

- 6.4.2.3 - XIS(R1, R2): calcula o valor da função  $\chi$  utilizando a equação (3.2.2.6).
- 6.4.2.4 - FI(R1, R2): calcula o valor da função  $\psi$  utilizando a equação (3.2.2.6).
- 6.4.2.5 - DX DR(R1, R2): calcula o valor da derivada de  $\chi$  em relação a  $r$ , através da equação (4.3.4.6).
- 6.4.2.6 - DFIDR(R1, R2): calcula o valor da derivada de  $\psi$  em relação a  $r$ , através da equação (4.3.4.5).
- 6.4.2.7 - D2X DR(R1, R2): calcula a segunda derivada de  $\chi$  em relação a  $r$ , através da equação (4.3.6.6).
- 6.4.2.8 - D2FIR(R1, R2): calcula a segunda derivada de  $\psi$  em relação a  $r$ , através da equação (4.3.6.5).
- 6.4.2.9 - B2K(M, Z): calcula a segunda derivada das funções modificadas de Bessel da segunda classe em relação a  $r$ , utilizando as equações (4.3.6.7), (4.3.6.8) e (4.3.6.9), onde  $Z = \frac{wR}{C}$ .

## 6.5 - Entrada de Dados

Os dados a serem fornecidos para a utilização do programa são os seguintes:

### 6.5.1 - Primeira Leitura: FORMAT (8I10/4F10.0, I10):

N	= número de elementos de contorno.
L	= número de pontos internos.
KD	= número de superfícies diferentes (máximo de 5).
NU(K) (K = 1,5)	= número do último nó de cada superfície diferente.
ET	= módulo de elasticidade transversal
CP	= coeficiente de Poisson
D	= densidade
W	= frequência
IND	= índice do problema
	=0 —> superfície fechada
	=1 —> superfície aberta

### 6.5.2 - Segunda Leitura: FORMAT (2F10.0)

$C_x$  e  $C_y$  = coordenadas x e y dos pontos internos.

6.5.3 - Terceira Leitura: FORMAT (2F10.0)

X e Y = coordenadas x e y dos pontos extremos dos elementos de contorno.

6.5.4 - Quarta Leitura: FORMAT (I10, 2F10.0, I10, 2F10.0)

KOD e CCP = condições de contorno.

onde KOD = código que indica o tipo de condição de contorno dos nós do elemento.

=0 —> deslocamento prescrito

=1 —> força de superfície prescrita.

CCP = valor prescrito.

6.6 - Saída dos Valores

O programa fornece a saída dos seguintes valores:

6.6.1 - deslocamentos X e Y dos pontos do contorno: estes deslocamentos estão na direção das coordenadas cartesianas x e y.

Módulo e fase dos deslocamentos.

6.6.2 - forças de superfície X e Y dos pontos do contorno: estas forças de superfície estão na direção das coordena



das cartesianas  $x$  e  $y$ .

Módulo e fase das forças de superfície.

- 6.6.3 - deslocamentos  $X$  e  $Y$  dos pontos internos  $\longrightarrow$  estes deslocamentos têm direções  $x$  e  $y$ .

Módulo e fase dos deslocamentos.

- 6.6.4 - tensões  $X$ ,  $XY$  e  $Y$  dos pontos internos  $\longrightarrow$  estas tensões têm direções  $x$  e  $y$ .

Módulo e fase das tensões.

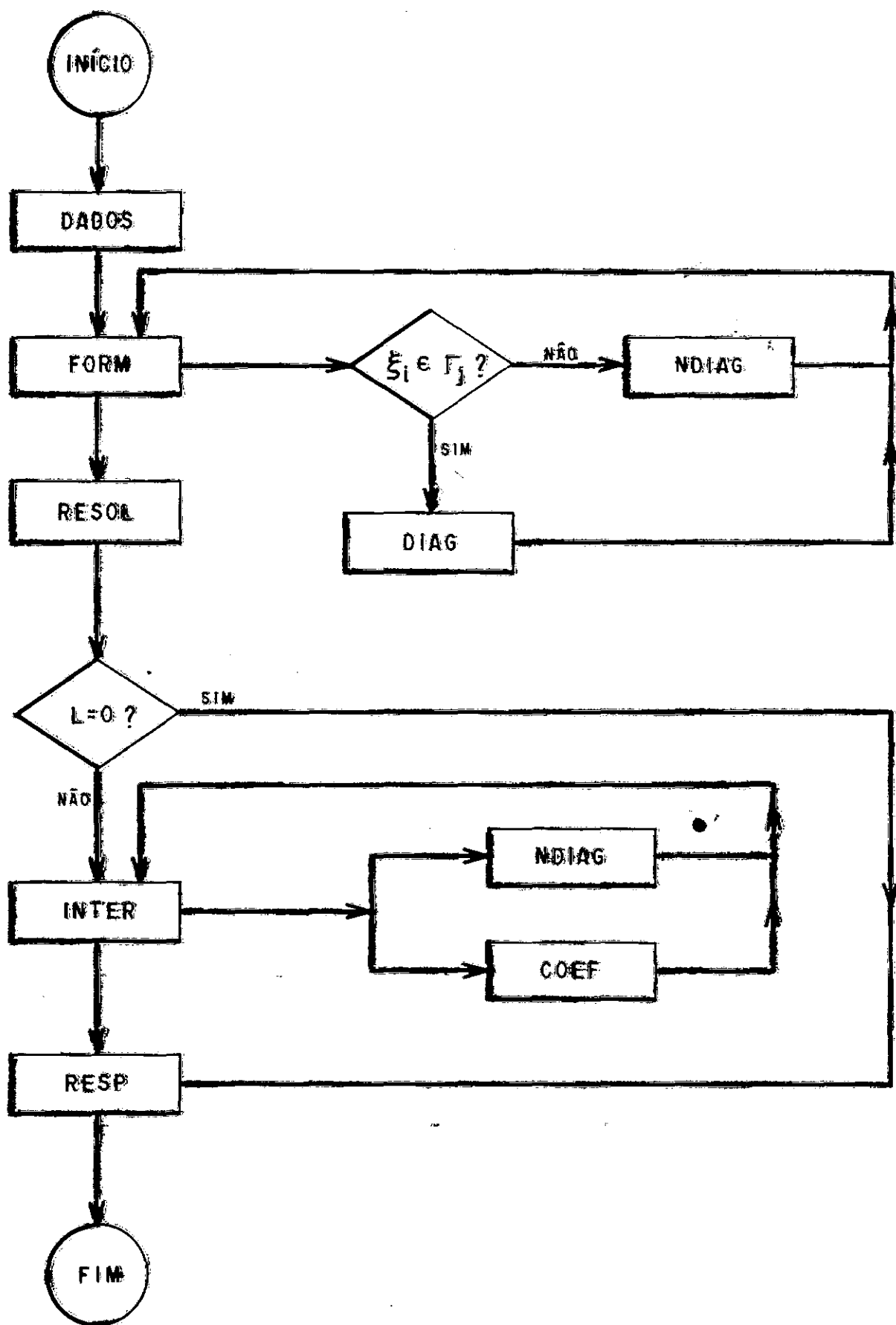


FIGURA 6.1 Fluxograma

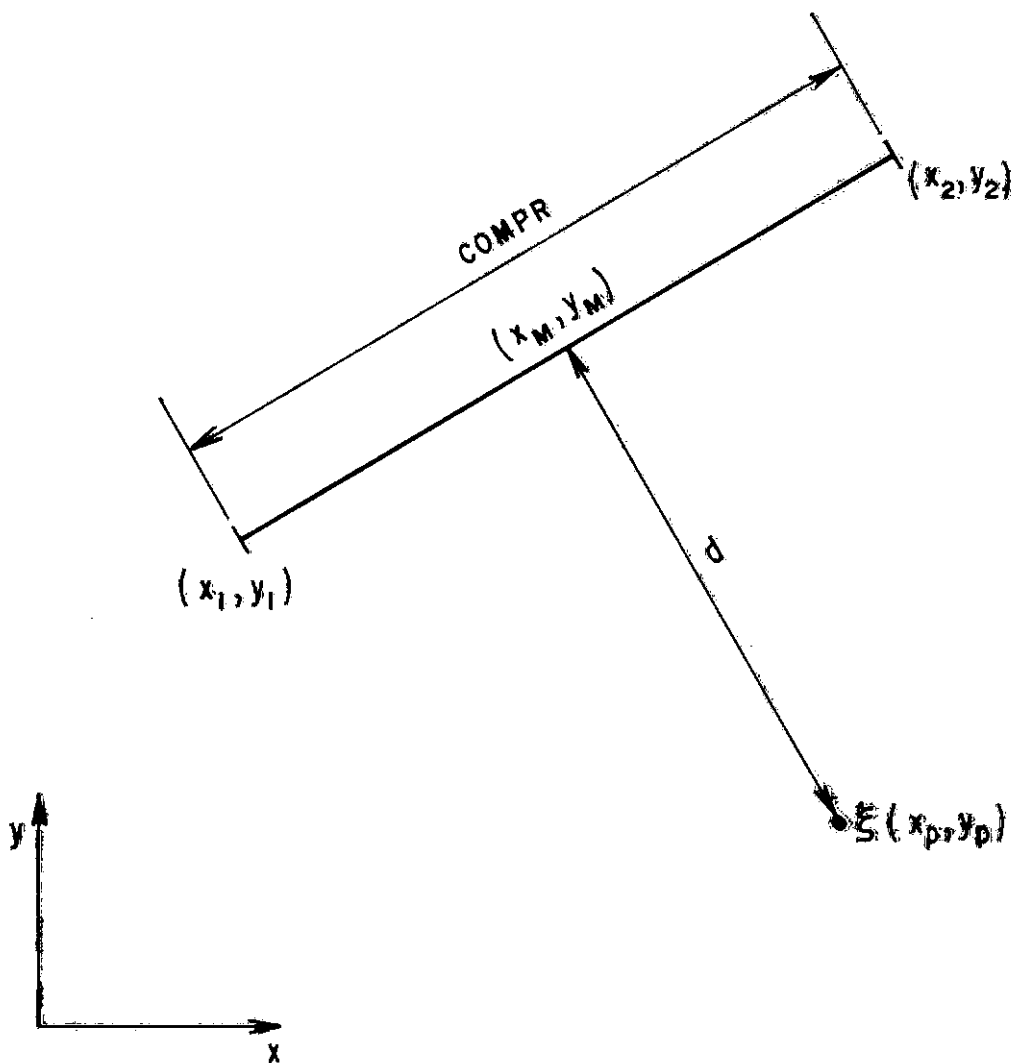


FIGURA 6.2 Definição da Variável SEL

## CAPÍTULO 7

### EXEMPLOS

## CAPÍTULO 7

### EXEMPLOS

#### 7.1 - Introdução

Este capítulo descreve os procedimentos utilizados para o desenvolvimento dos exemplos. Mostra ainda as comparações feitas entre os resultados obtidos pelo programa e os já existentes.

O primeiro exemplo consiste no estudo de uma barragem de terra sujeita a uma aceleração horizontal do solo. O segundo, o cálculo das matrizes de rigidez para fundações superficiais e embutidas. Já, o terceiro, consiste no estudo de uma cavidade cilíndrica inserida num meio infinito sob a ação de uma onda de compressão.

#### 7.2 - Barragem de Terra

O objetivo deste exemplo consistiu no estudo do comportamento de uma barragem de terra sujeita ao movimento do solo, considerando-se a hipótese de que sua base repousa sobre um solo perfeitamente rígido. As condições de contorno, embora irreais, foram implementadas para que se pudesse comparar os resultados com a solução clássica utilizando o método dos elementos finitos (33). As dimensões da barragem bem como o módulo de elasticidade transversal, o coeficiente de Poisson e a densidade se encontram na Figura 7.1. A malha de elementos finitos utilizada por Clough e Chopra (33) pode ser vista na Figura 7.2.

As deformações de flexão produzidas na barragem são desprezíveis, em virtude das condições de contorno utilizadas. Consequentemente, a barragem pode ser idealizada, através da teoria "Shear Wedge", como uma viga vertical de cisalhamento com largura variável. A equação da frequência através desta teoria é dada por:

$$J_0 \left[ w_n \sqrt{\frac{\rho}{G}} H \right] = 0 \quad (7.2.1)$$

e o modo por

$$w_n^*(y) = J_0 \left[ w_n \sqrt{\frac{\rho}{G}} (H - y) \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.2.2)$$

onde  $J_0$  = função de Bessel de primeira classe de ordem zero.

$H$  = altura total da barragem.

Quando  $n = 1$  na equação (7.2.1), encontra-se para  $w_1$  o valor de 8,01. A equação (7.2.2) pode ser expressa como:

$$w_1^*(y) = J_0 \left[ 0,00801 (300 - y) \right] \quad (7.2.3)$$

Na análise pelo programa aqui apresentado, o contorno foi dividido em 30 elementos e 5 pontos internos foram usados, como mostra a Figura 7.3. A aceleração horizontal do solo foi substituída por forças de superfície que variam linearmente (na direção aposta à aceleração) representando as forças de inércia da barragem, atuando nas faces AB e BC (Figura 7.3).

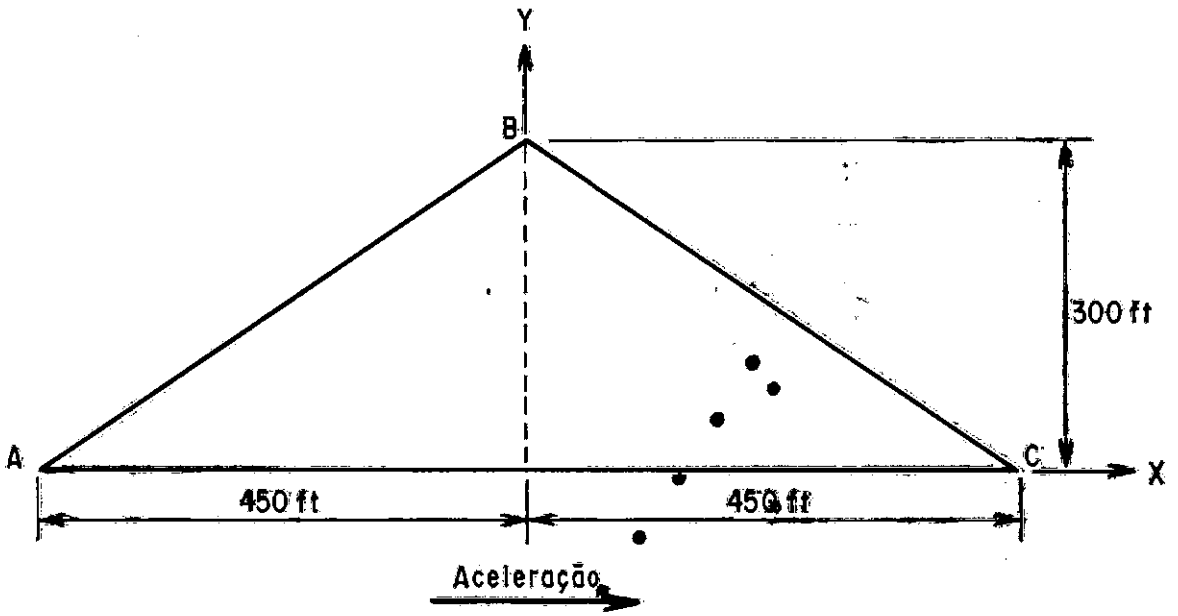
As condições de contorno para os nós são as seguintes:

- a) nós de 1 a 10 → deslocamento nulo.
- b) nós de 11 a 20 → forças de superfície variando de 10 a 1  $\text{lb/ft}^2$ , respectivamente.
- c) nós de 21 a 30 → forças de superfície variando de 1 a 10  $\text{lb/ft}^2$ , respectivamente.

Inicialmente, foi estudado o movimento horizontal do ponto B localizado no nó 20 (Figura 7.3), com a variação da frequência de 0 a 9 rad/s. Os resultados obtidos foram plotados em um gráfico em que as frequências foram assinaladas na abscissa e o módulo do deslocamento horizontal do ponto B, na ordenada. Verifica-se a existência de um pico no gráfico; tal pico representa o valor da frequência fundamental que é dada por:  $w_1 = 7,78$  rad/s. Comparando-se este valor com os obtidos pelo método dos elementos finitos (Chough-Chopra) e pela teoria "Shear Wedge" (Tabela 7.1), obtem-se os seguintes erros relativos: 0,9% e 2,89%, respectivamente (Figura 7.4).

PROGRAMA	ELEMENTOS FINITOS	TEORIA "SHEAR WEDGE"
7,78	7,71	8,01

Tabela 7.1 - Comparação dos resultados obtidos para a frequência fundamental.



Módulo de Elasticidade Transversal :  $G = 4,037 \times 10^6 \text{ lb/ft}^2$   
 Coeficiente de POISSON :  $\nu = 0,45$   
 Densidade :  $\rho = 4,037 \text{ lb/ft}^3$

FIGURA 7.1 Dados da Barragem

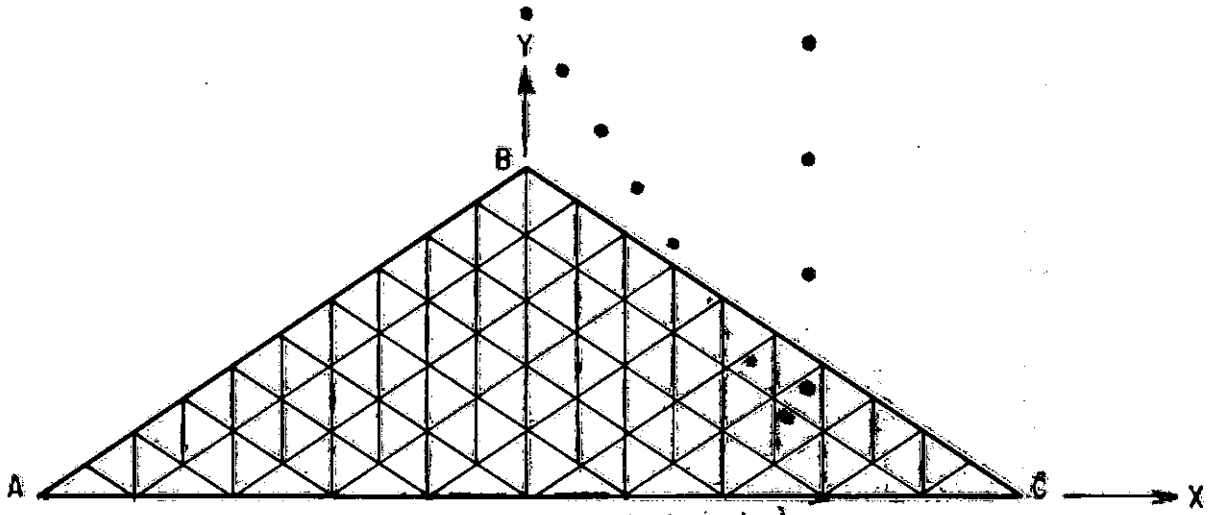


FIGURA 7.2 Malha de Elemento Finito - CLOUGH E CHOPRA



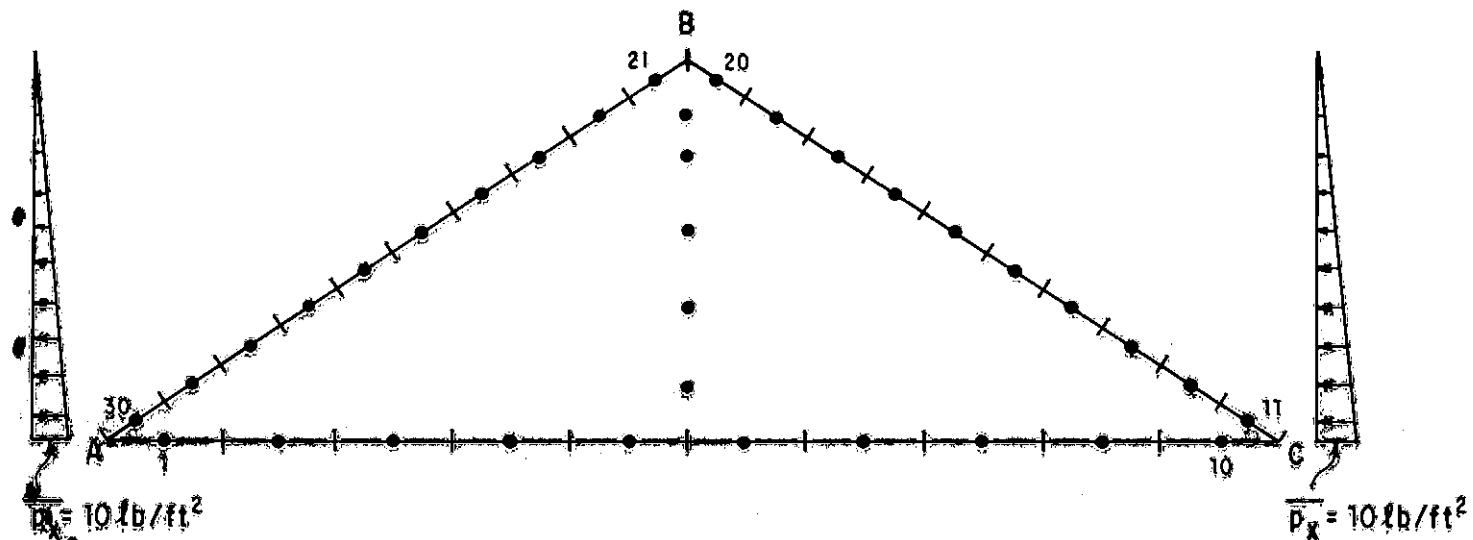


FIGURA 7.3 Discretização de Elementos de Contorno

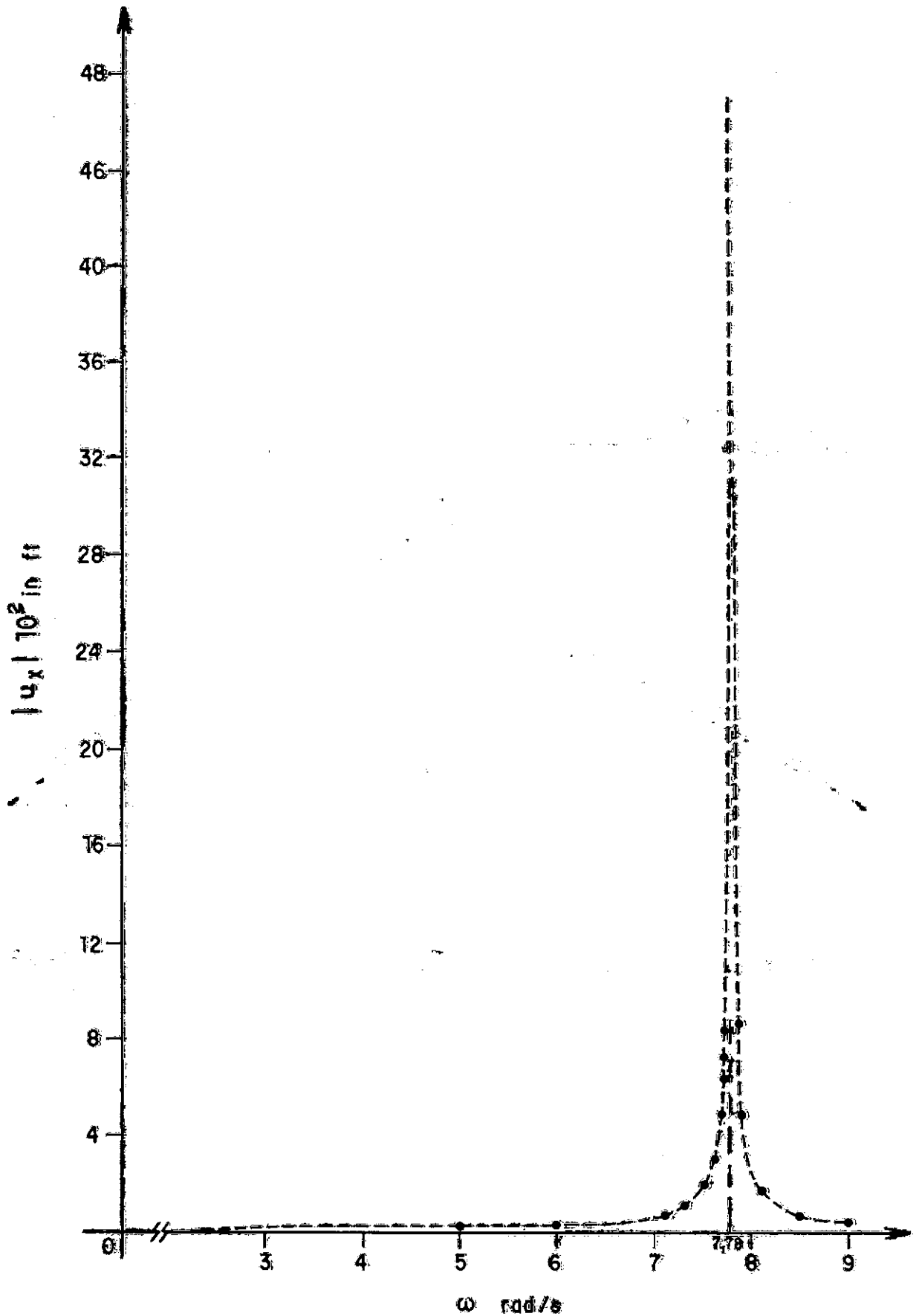


FIGURA 7.4 Movimento Horizontal do Ponto B com a Variação da Frequência  $\omega$

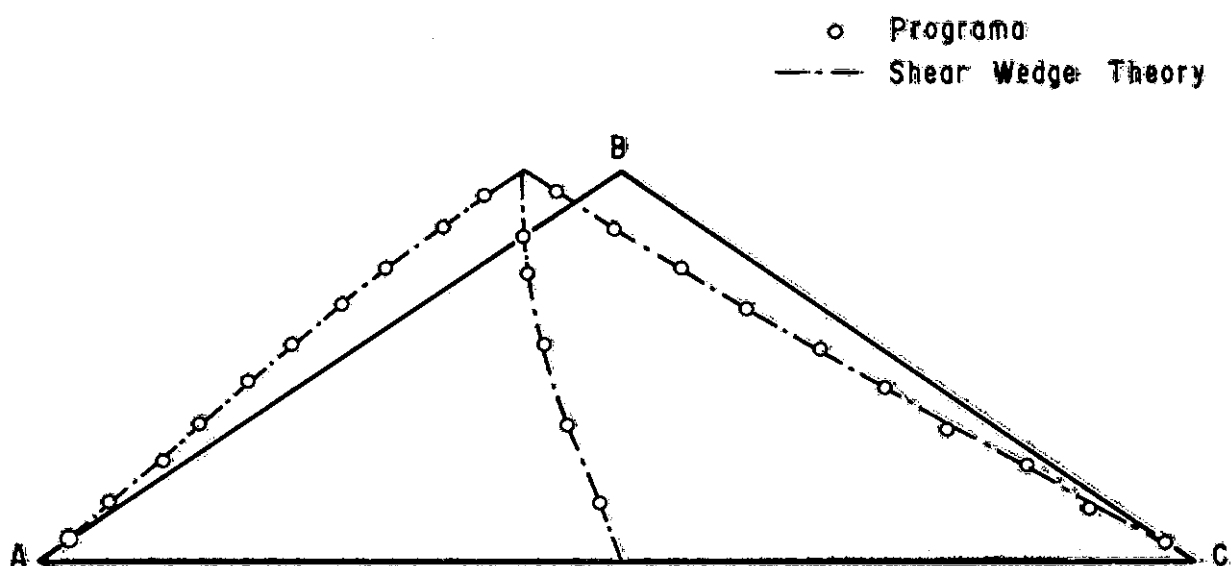


FIGURA 7.5 Configuração do Modo Fundamental

A grande discrepância observada entre o resultado do programa e o da teoria "Shear Wedge" deve-se ao fato de que ao serem desprezadas as deformações de flexão a barragem se torna mais rígida.

A configuração do modo em sua forma normalizada, obtida através do programa, encontra-se na Figura 7.5, juntamente com os resultados fornecidos pela teoria "Shear Wedge". Comparando-se estes dois perfis, observamos que existe boa concordância entre eles.

### 7.3 - Matriz de Rigidez de Fundações

O conhecimento da matriz de rigidez de fundações é importante em muitos problemas de Engenharia. Em muitos casos, as propriedades do solo não se apresentam uniformes com a profundidade (normalmente verifica-se um crescimento no módulo de elasticidade transversal) ou ainda, um depósito de espessura finita é encontrado composto de algum tipo de rocha dura. Apesar dessas considerações, a idealização matemática usual considera o semi-espço homogêneo, isotrópico e elástico-linear.

A importância da utilização de elementos de contorno para o cálculo da matriz de rigidez, é que automaticamente o amortecimento irradiado é considerado, e que um meio viscoelástico pode ser simulado através da introdução de um módulo de elasticidade transversal complexo (29).

A matriz de rigidez de fundações consiste na obtenção de forças ou momentos, necessários para se produzir movimen-

tos lineares ou rotações dinâmicas unitárias em uma fundação rígida e sem massa, no semi-espaco, mantendo-se fixo os demais graus de liberdade.

Como a solução fundamental satisfaz ao domínio infinito, somente o contorno, isto é, a interface solo-fundação e a superfície livre necessitam ser discretizados. Teoricamente, a discretização da superfície deve se estender até o infinito.

### 7.3.1 - Fundações Superficiais

Para as fundações superficiais, uma boa solução pode ser obtida desprezando-se os elementos da superfície livre. Verifica-se que todos os termos que representam a influência dos elementos da superfície livre são zero, com exceção daqueles responsáveis pela influência do movimento vertical no movimento horizontal e vice-versa. Contudo, sendo esta influência pequena, é comum desprezã-la na interação solo-estrutura.

As dimensões da fundação superficial, bem como as propriedades do solo encontram-se na Figura 7.7. A interface solo-fundação é discretizada em 8 elementos (Figura 7.7).

As condições de contorno utilizadas são as seguintes:

a) movimento horizontal

$$\text{nós de 1 a 8} \longrightarrow u_x = 1 \quad u_y = 0$$

b) movimento vertical:

$$\text{n\acute{o}s de 1 a 8 \longrightarrow u_x = 0 \quad u_y = -1}$$

c) rota\c{c}\~ao:

para o c\~alculo da rota\c{c}\~ao foi utilizada a teoria dos pequenos deslocamentos (Figura 7.6) na forma:

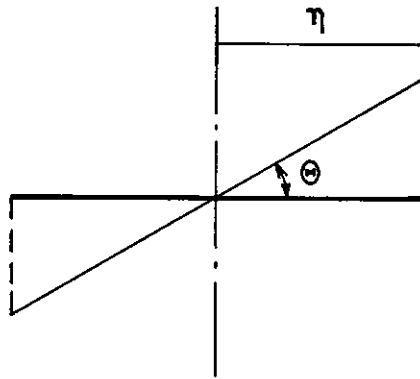


FIGURA 7.6 Rota\c{c}\~ao

$$v = \eta \theta \quad \theta \approx 1$$

$$v = \eta \quad (\text{para cada n\acute{o}})$$

onde  $\eta$  \~e a coordenada horizontal do n\acute{o}.

Desse modo, utilizando-se a rela\c{c}\~ao acima:

$$\text{n\acute{o}s de 1 a 4 \longrightarrow u_x = 0 \quad u_y = \eta}$$

$$\text{n\acute{o}s de 5 a 8 \longrightarrow u_x = 0 \quad u_y = -\eta}$$

Os resultados obtidos no programa foram comparados com os de Jakub (30), cuja solução é da forma:

$$K = K_0 (k + if_0 d) (1 + 2iD) \quad (7.3.1.1)$$

onde:

$K_0$  = matriz de rigidez estática

$k$  e  $d$  = coeficientes dependentes da frequência

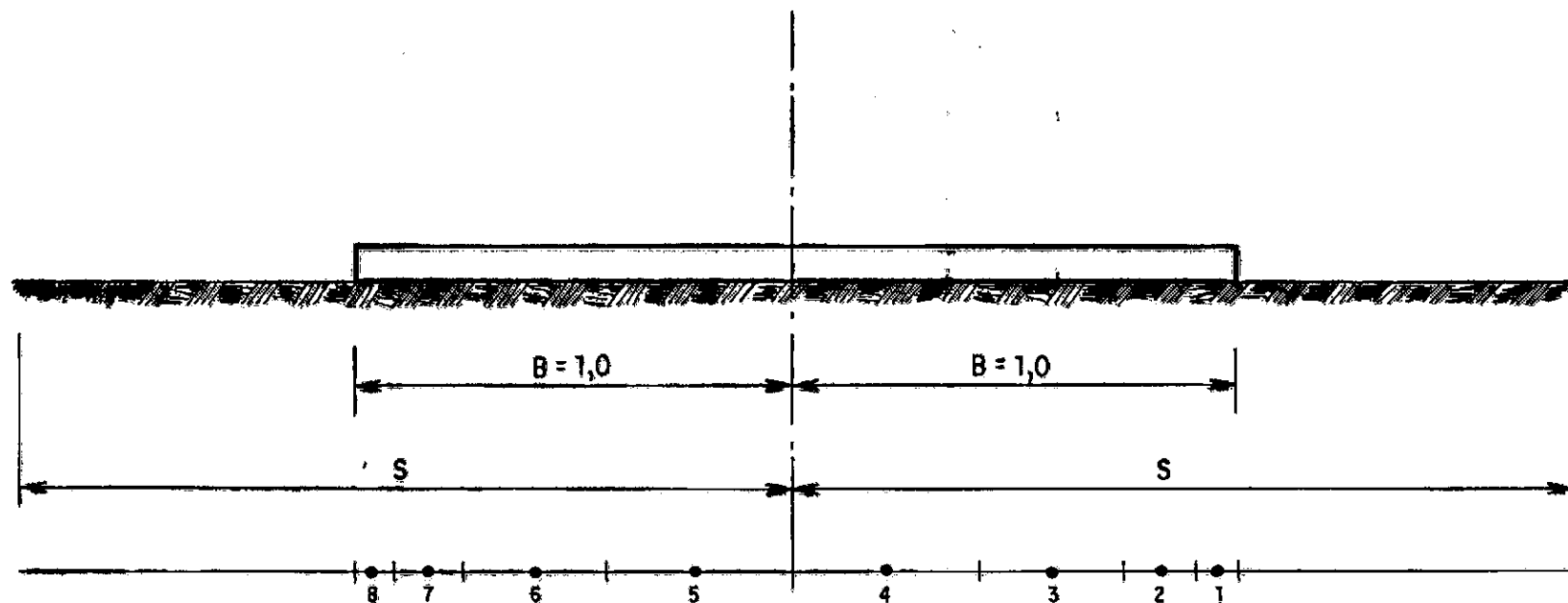
$f_0$  = frequência adimensional —  $f_0 = \omega B/C_2$

$C_2$  = velocidade da onda cisalhante do solo

$D$  = coeficiente de atrito interno do solo.

A Figura 7.8 representa a variação da matriz de rigidez horizontal  $K_x$  com a variação da distância da superfície livre a ser discretizada, para uma frequência adimensional  $f_0 = 0,9$ . Observando-se este gráfico, constata-se que a influência da superfície livre para este tipo de fundação é praticamente nula.

A variação da matriz de rigidez de momento  $K_\psi$  com a frequência adimensional  $f_0$  para um valor de  $G = 1$ , é representada na Figura 7.9. Embora o amortecimento interno tenha sido desprezado, a parte imaginária aparece, devido ao amortecimento geométrico ou irradiado, isto é, a energia que se irradia para fora e para baixo em direção ao contorno, no infinito. A parte real decresce com o aumento de  $f_0$ , acarretando uma redução da rigi



Módulo de Elasticidade Transversal :  $G = 1$   
 Coeficiente de POISSON :  $\nu = 1/3$   
 Densidade :  $\rho = 1$

FIGURA 7.7 Dados da Fundação – Discretização Superficial até a Distância  $S$ .



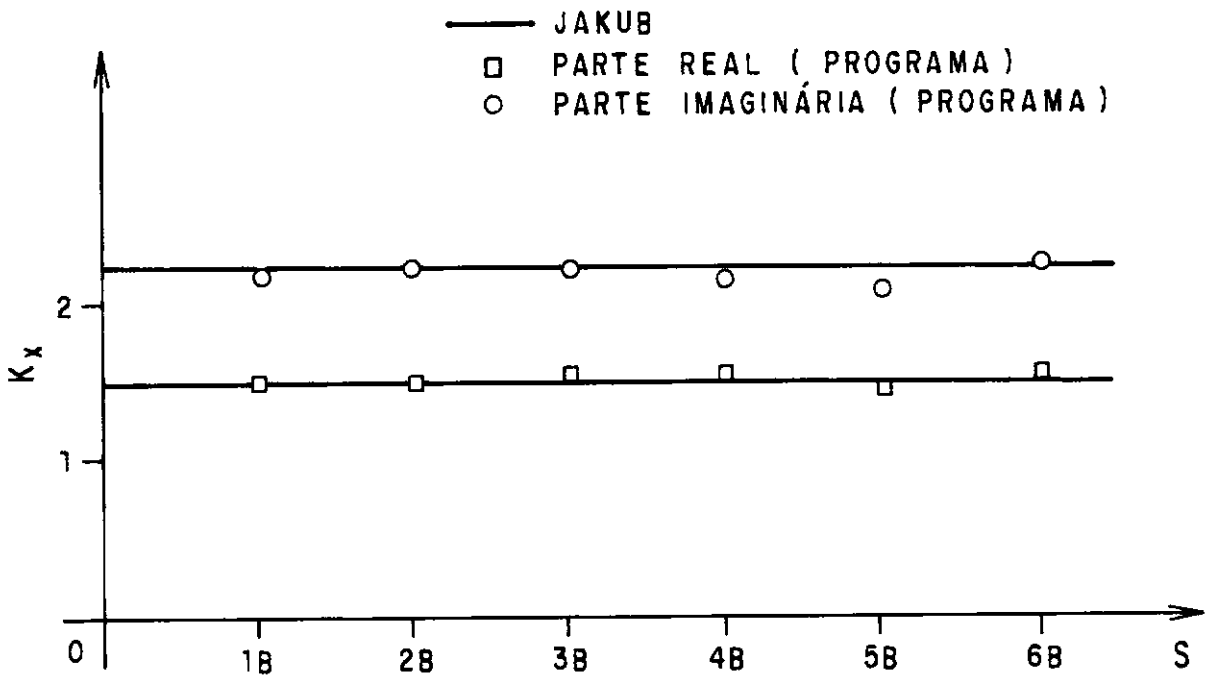


FIGURA 7.8 Matriz de Rigidez Horizontal  $K_x$  com a Variação da Superfície Livre Discretizada  $S$  a uma Frequência Adimensional igual a 0,9

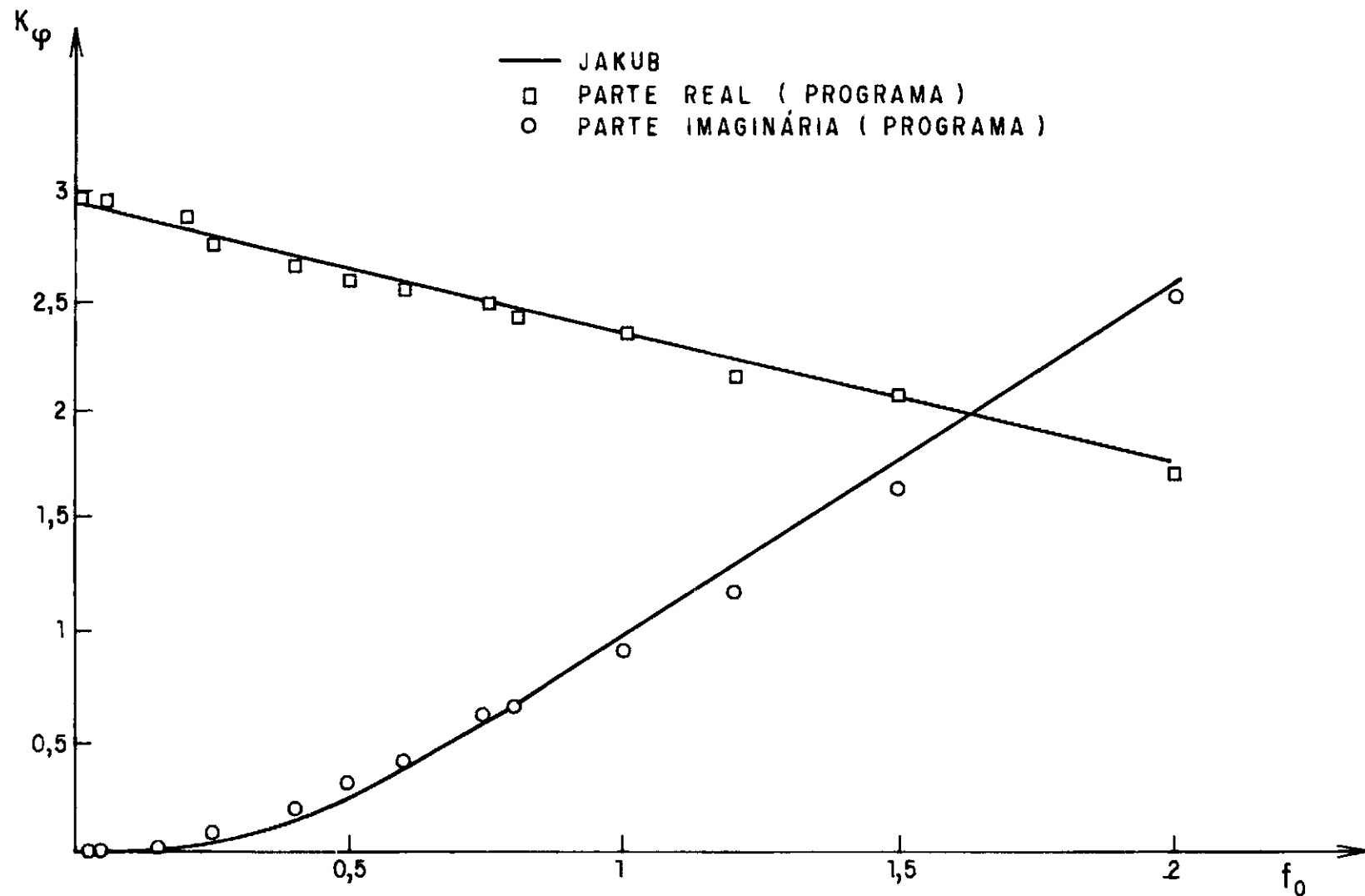


FIGURA 7.9 Variação da Matriz de Rigidez de Momento  $K_\varphi$  com a Frequência Adimensional  $f_0$

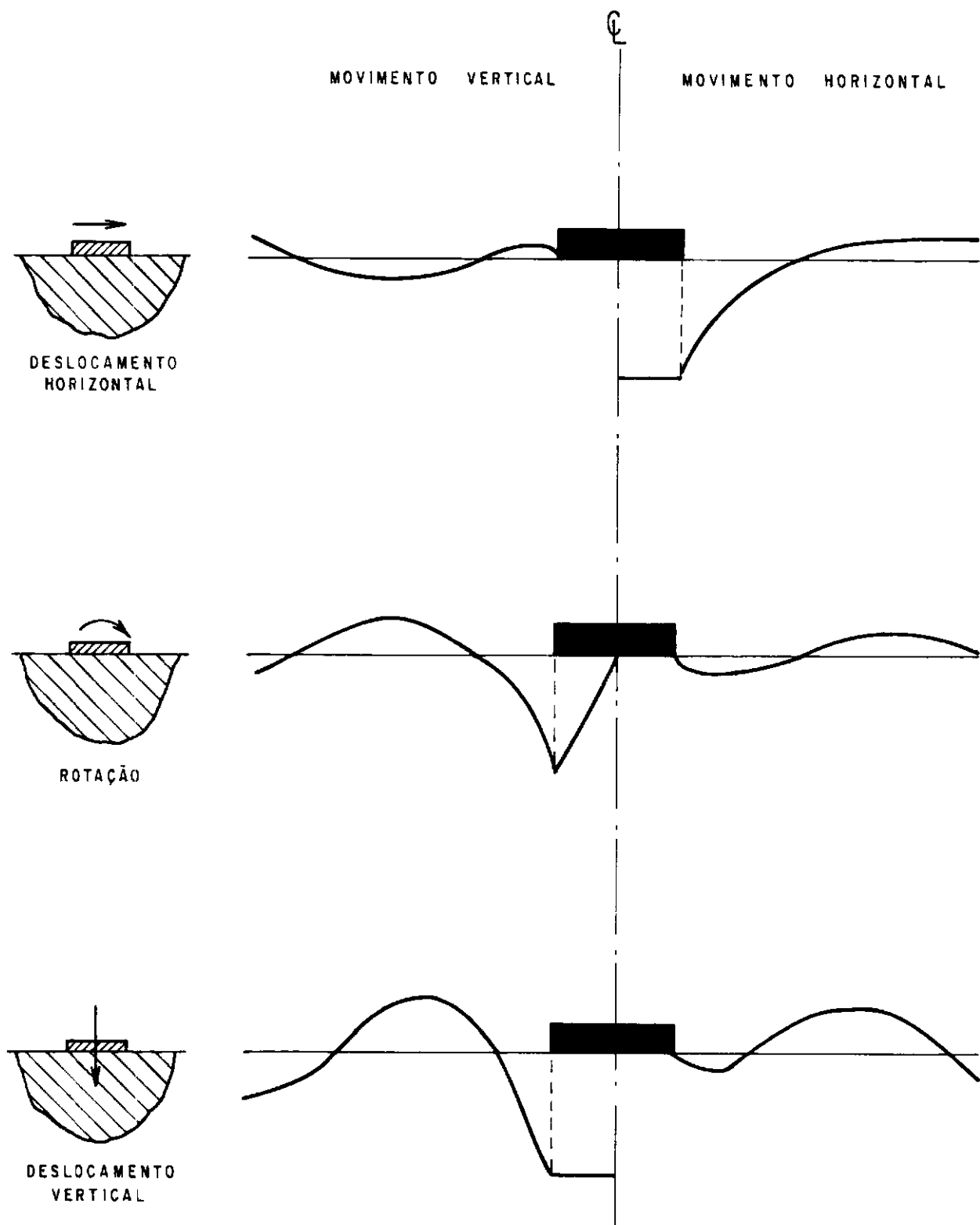


FIGURA 7.10 Parte Real do Movimento da Superfície Livre para uma Frequência  $f_0 = 1 \rightarrow$  Fundação Superficial.

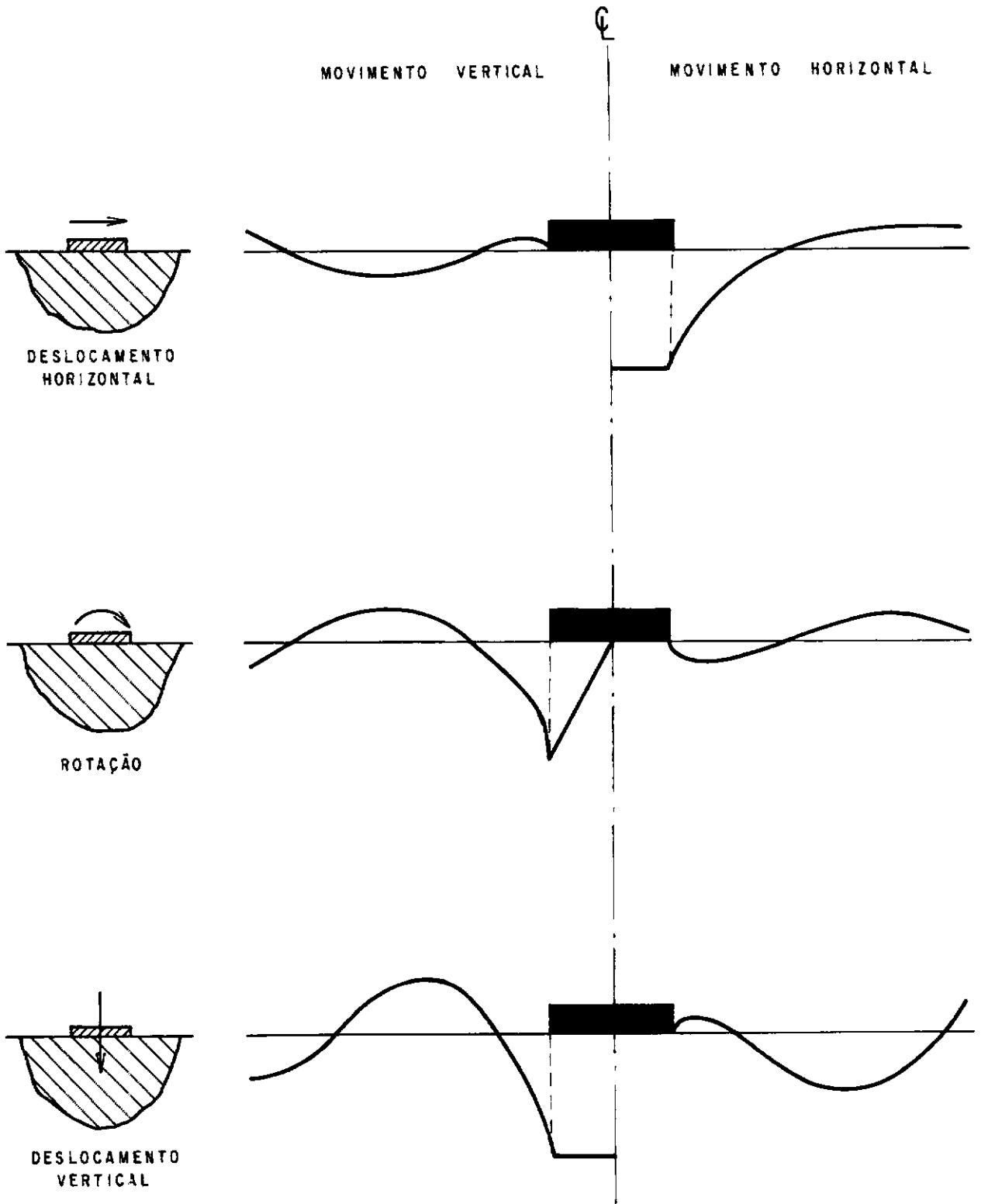


FIGURA 7.11 Parte Real do Movimento da Superfície Livre para uma Frequência  $f_0 = 0,5 \rightarrow$  Fundação Superficial.

dez, entretanto a parte imaginária aumenta, indicando um aumento do amortecimento.

As Figuras 7.10 e 7.11 apresentam a parte real do deslocamento da superfície livre quando um movimento harmônico unitário (horizontal, vertical e rotação) é aplicado à fundação com as frequências  $f_0 = 1$  e  $f_0 = 0.5$ . Estes resultados apresentam excelente concordância com os de Dominguez e Alarcon (2).

### 7.3.2 - Fundações Embutidas

Para o caso deste tipo de fundação, faz-se necessário tanto a discretização da interface solo-fundação quanto da superfície livre. Para se obter bons resultados, à medida que a razão de embutimento  $E/B$  (Figura 7.12) cresce, necessita-se de uma quantidade maior de elementos na superfície livre.

As dimensões da fundação embutida, bem como as propriedades do solo encontram-se na Figura 7.13. A interface solo-fundação juntamente com a superfície livre são discretizadas em 28 elementos (Figura 7.13).

As condições de contorno são as mesmas utilizadas para a fundação superficial.

A Figura 7.14 apresenta a parte real do deslocamento da superfície livre quando um movimento harmônico unitário (horizontal, vertical e rotação) é aplicado à fundação com a frequência adimensional  $f_0 = 0.5$ . Os resultados obtidos apresentam concordância com os de Dominguez e Alarcon (2).

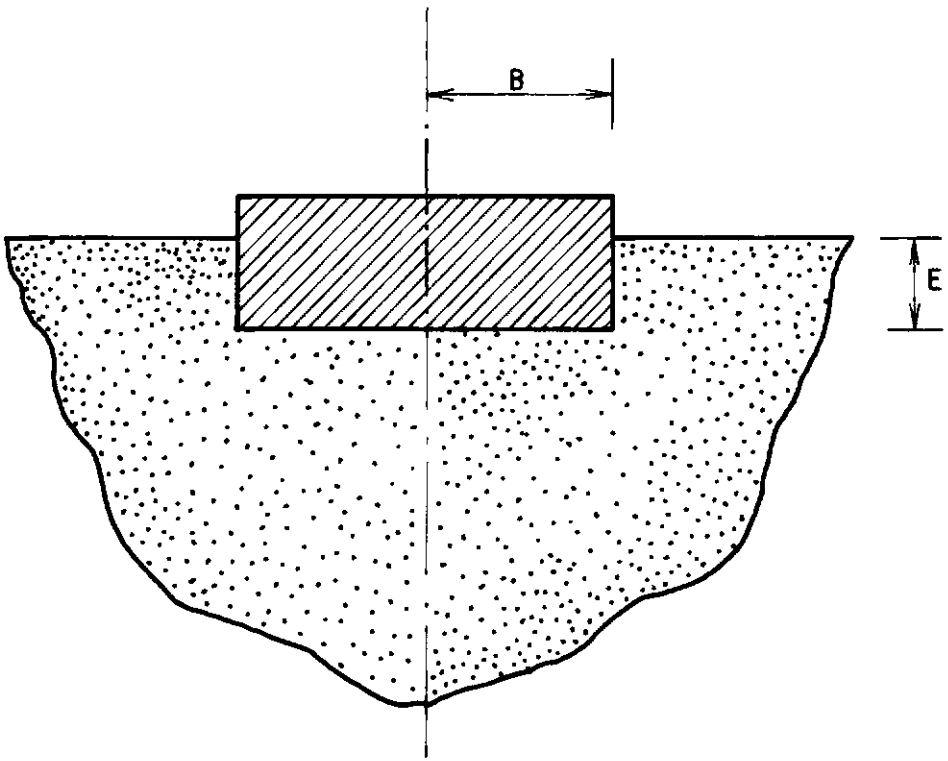
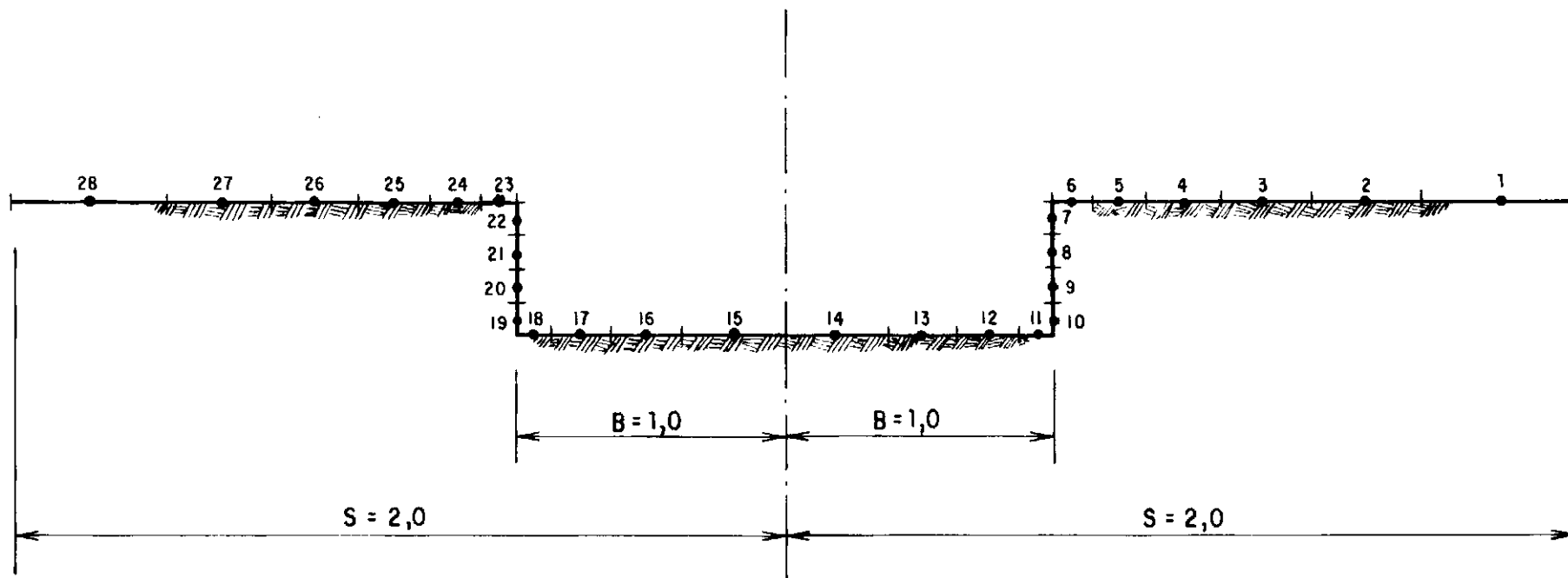


FIGURA 7.12 Razão de Embutimento  $E/B$



Módulo de Elasticidade Transversal :  $G = 1$   
 Coeficiente de POISSON :  $\nu = 1/3$   
 Densidade :  $\rho = 1$   
 $E / B = 0,5$

FIGURA 7.13 Dados da Fundação Embutida – Discretização

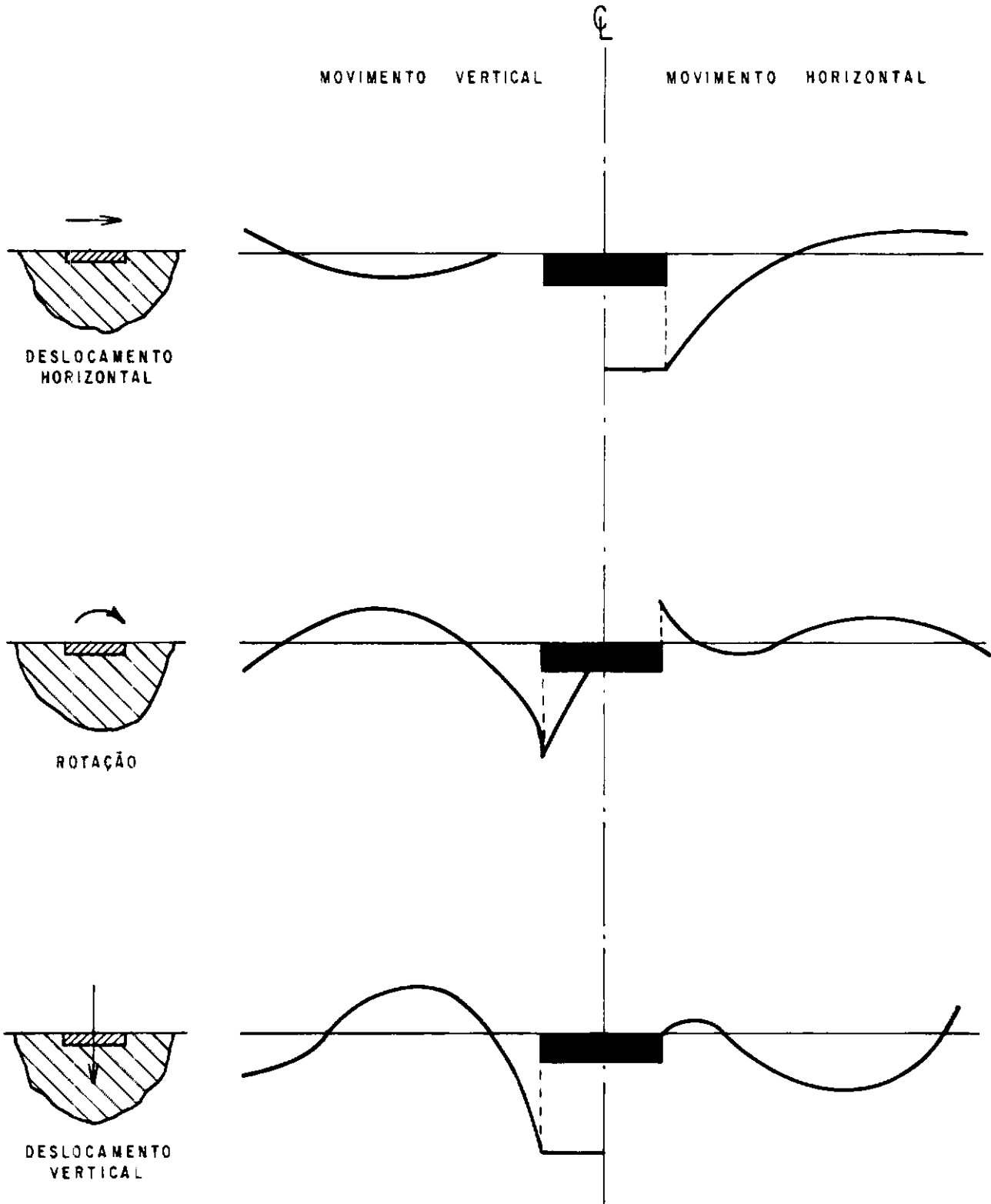


FIGURA 7.14 Parte Real do Movimento da Superfície Livre para uma Freqüência  $f_0 = 0,5 \rightarrow$  Fundação Embutida.



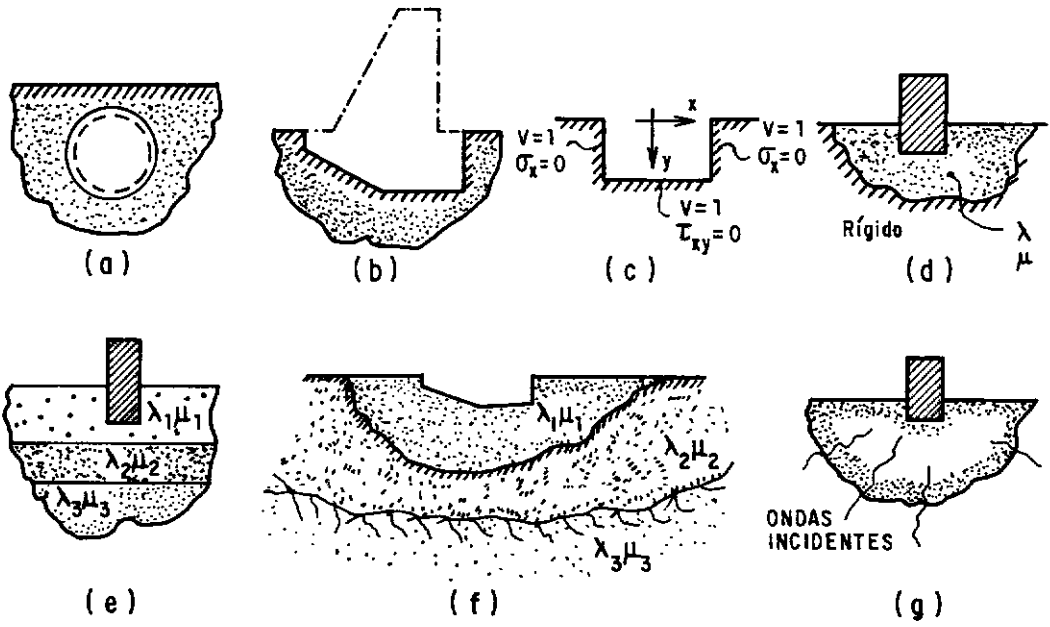


FIGURA 7.15 Algumas Sugestões para Aplicação

A Figura 7.15 apresenta algumas sugestões para aplicação.

#### 7.4 - Cavidade Num Meio Infinito

O terceiro exemplo consistiu no estudo de uma cavidade cilíndrica de raio  $\rho'$  e comprimento infinito, inserida num meio infinito, elástico e linear, sob a influência de uma onda plana de compressão (Figura 7.16). O estado de tensão ao redor da cavidade, bem como o fator de concentração dinâmica de tensões FCT são determinados.

O problema corresponde ao de estado plano de deformação, necessitando-se da determinação do estado de tensão ao longo de uma cavidade circular contida num plano carregado dinamicamente por uma onda de compressão que apresenta as seguintes tensões:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= S_0 \\ \sigma_y &= \left[ \nu / (1 - \nu) \right] \sigma_x \\ \tau_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{7.3.1}$$

A distribuição de tensões é obtida através da superposição das tensões produzidas pela onda de pressão num meio sem a cavidade com as tensões produzidas pela aplicação de forças de superfície corretivas ao longo do contorno da cavidade, a fim de que após a superposição dos dois casos, este tenha forças de superfície nulas (Figura 7.17). O primeiro problema possui solução trivial, então, apenas o segundo precisa ser resolvido através do programa.

Na análise pelo programa, o contorno foi discretizado em 24 segmentos retilíneos de mesmo comprimento (Figura 7.18).

Os dados para a utilização do programa são os seguintes:

$$\begin{aligned} G &= 11.600.000 \text{ lb/in}^2 \\ \rho &= 0,000734 \text{ lb - sec}^2/\text{in}^4 \\ \rho' &= 10 \text{ in} \\ \nu &= 0,25 \end{aligned}$$

A intensidade da carga aplicada foi convenientemente adotada como  $S_0 = -1 \text{ lb/in}^2$ , para que os valores da tensão  $\sigma_{11}$  representem diretamente os valores de FCT.

Para se obter as condições de contorno prescritas-forças de superfície utilizou-se as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \text{como } \tau_{xy} = 0 \quad \longrightarrow \quad P_x &= \sigma_x \ell \\ P_y &= \sigma_y m \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

onde  $\ell$  e  $m$  são os cossenos diretores da normal  $n$  com o eixo  $x$  e o eixo  $y$ , respectivamente.

Para a solução do segundo problema, os sinais das forças de superfície  $P_x$  e  $P_y$  foram trocados (Figura 7.19).

Entrando com os dados acima no programa, este fornecerá os valores dos deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$  nos pontos nodais.

Assim, obtem-se os deslocamentos nos pontos de contorno (Figura 7.20) através das seguintes expressões:

$$u_x(A) = \frac{1}{2} (u_x^i + u_x^j) \quad (7.3.3)$$

$$u_x(B) = \frac{1}{2} (u_x^i + u_x^k)$$

$$u_y(A) = \frac{1}{2} (u_y^i + u_y^j) \quad (7.3.4)$$

$$u_y(B) = \frac{1}{2} (u_y^i + u_y^k)$$

Decompondo-se estes valores segundo os eixos  $x_1$  e  $x_2$ , obtêm-se  $u_1$  e  $u_2$  para os pontos de contorno A e B.

Finalmente, para o cálculo de  $\sigma_{11}$ , utiliza-se a seguinte expressão:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{1 - \nu} (2G \varepsilon_{11} + \nu \sigma_{22}) \quad (7.3.5)$$

$$\text{onde } \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\ell} (u_1^B - u_1^A) \quad (7.3.6)$$

sendo  $\ell$ , o comprimento do elemento.

$\sigma_{22} = p_2$  ( $p_2$  é o valor da força de superfície no nó i na direção  $x_2$ ).

Superpondo-se estes resultados com a solução trivial para o primeiro problema, encontra-se o valor de  $\sigma_{11}$  (total) que corresponde ao valor de FCT.

A Figura 7.21 representa a variação do valor absoluto de FCT (o valor absoluto é utilizado porque  $\sigma_{11}$  é um número complexo) com a variação do parâmetro  $wr/C_1$ , para um valor de  $\theta$  igual a  $90^\circ$ . Este gráfico contém os resultados do programa, bem como os resultados obtidos por Pao (22) e Pao e Mow (31) (resultados numéricos), os de Manolis e Beskos (27) (resultados utilizando um programa de elementos de contorno) e ainda os de Kirsch (32) (solução estática). Comparando-se os resultados obtidos através de programas de elementos de contorno, observa-se que ambos se aproximam. A causa desta diferença deve-se ao fato de que no programa desenvolvido neste trabalho foi utilizado elementos constantes retilíneos, enquanto que no desenvolvido por Manolis e Beskos (27) foi utilizado elementos constantes curvos.

As Figuras 7.22 e 7.23, mostram os valores de FCT do programa, os de Manolis e Beskos (27) e os da solução estática de Kirsch (32) para os valores de  $\theta$  iguais a  $52,5^\circ$  e  $82,5^\circ$ . Comparando-se os dois resultados obtidos pelos programas de elementos de contorno, observa-se que os resultados se aproximam.

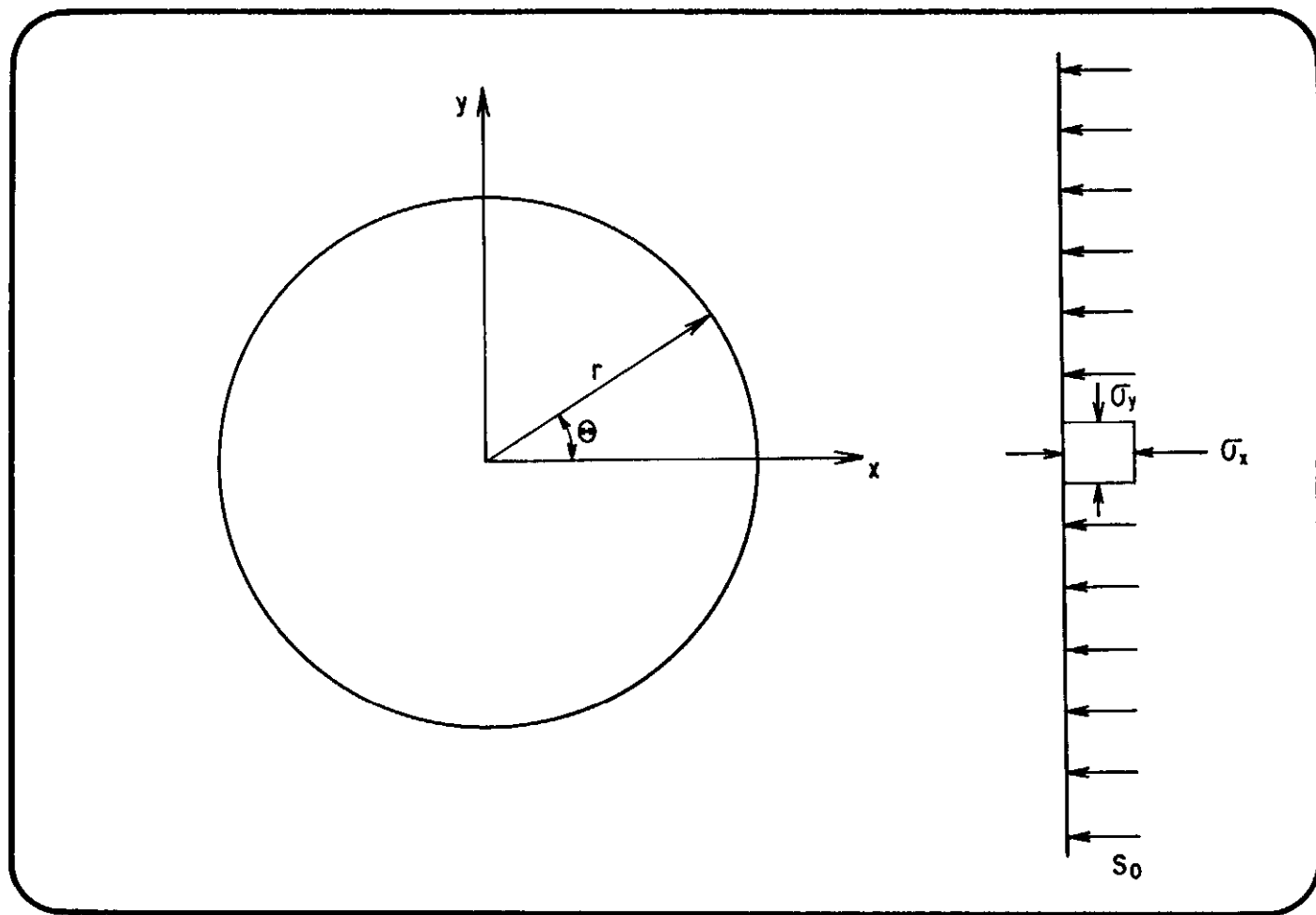


FIGURA 7.16 Cavity Sujeita a uma Onda de Compressão num Meio Infinito

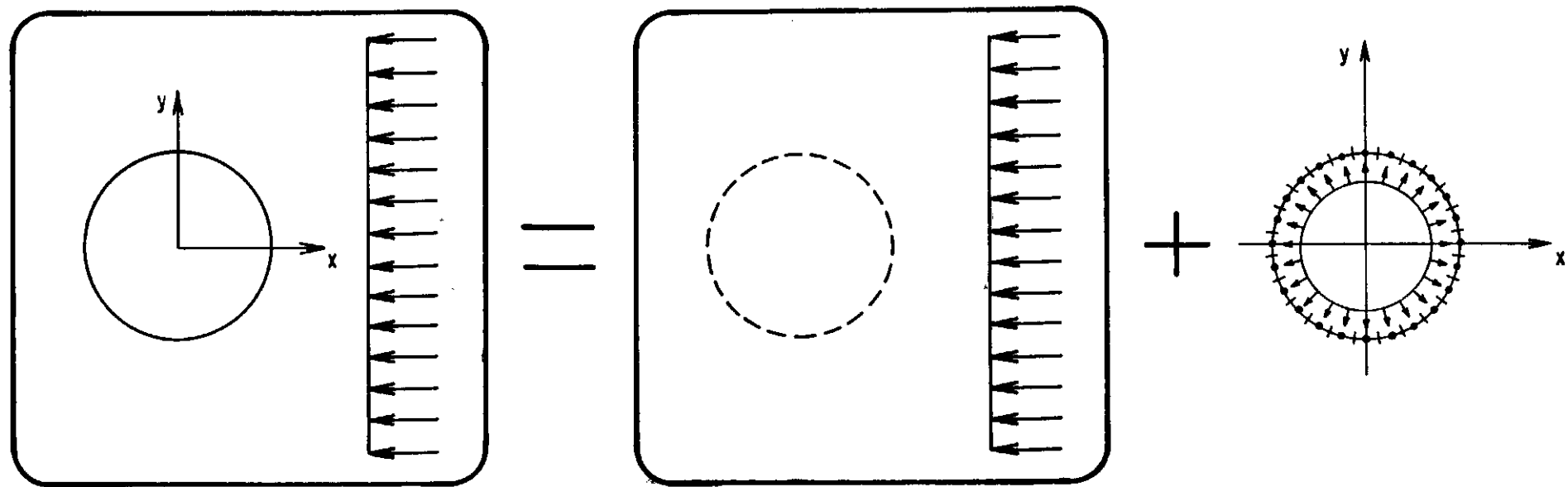


FIGURA 7.17 Superposição dos Problemas

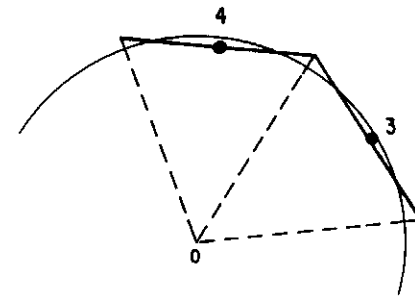
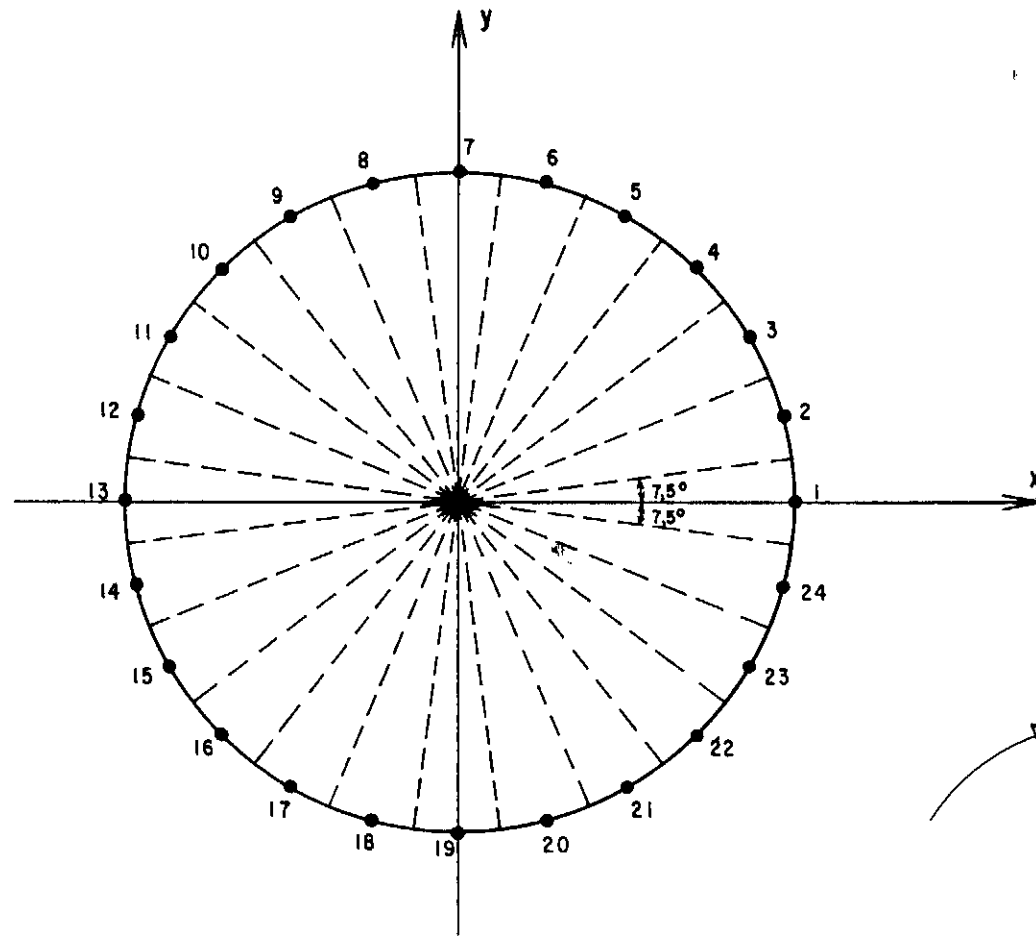


FIGURA 7.18 Discretização do Contorno



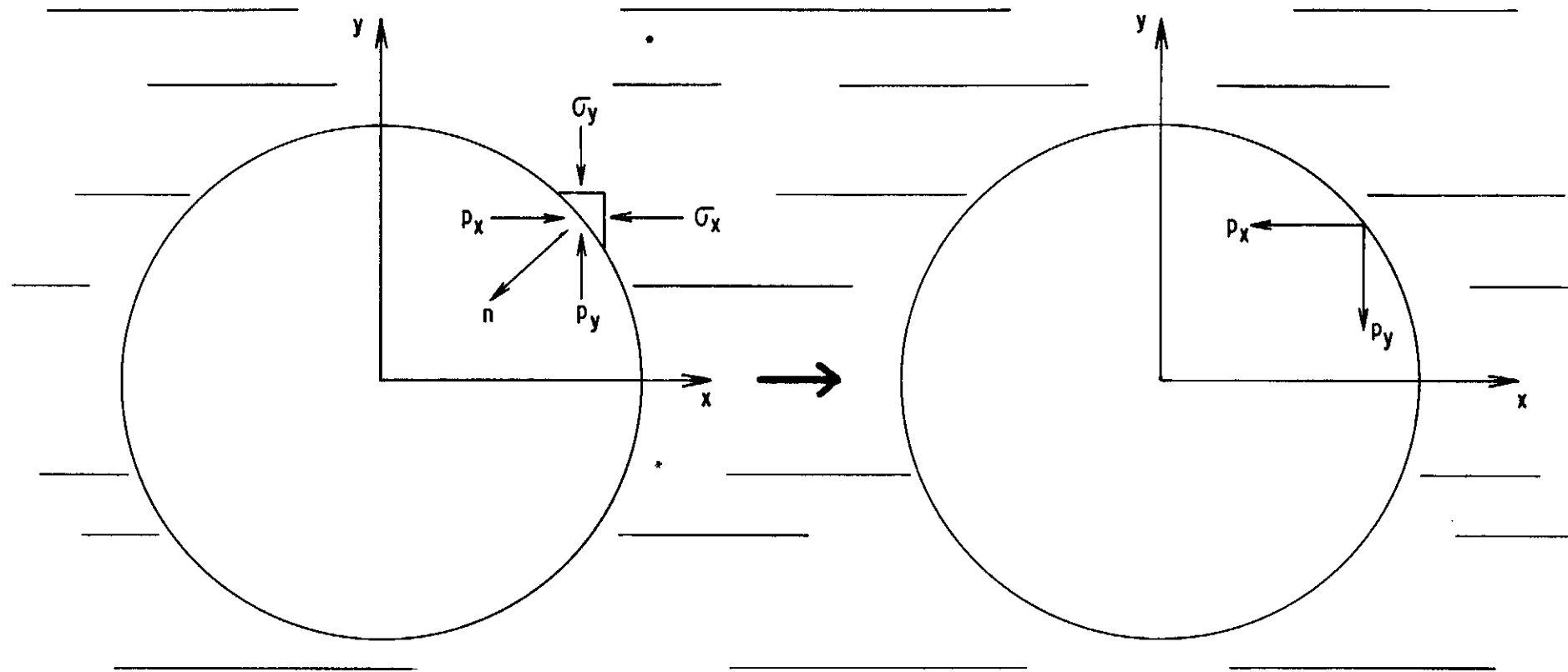


FIGURA 7.19 Sinais das Forças de Superfície

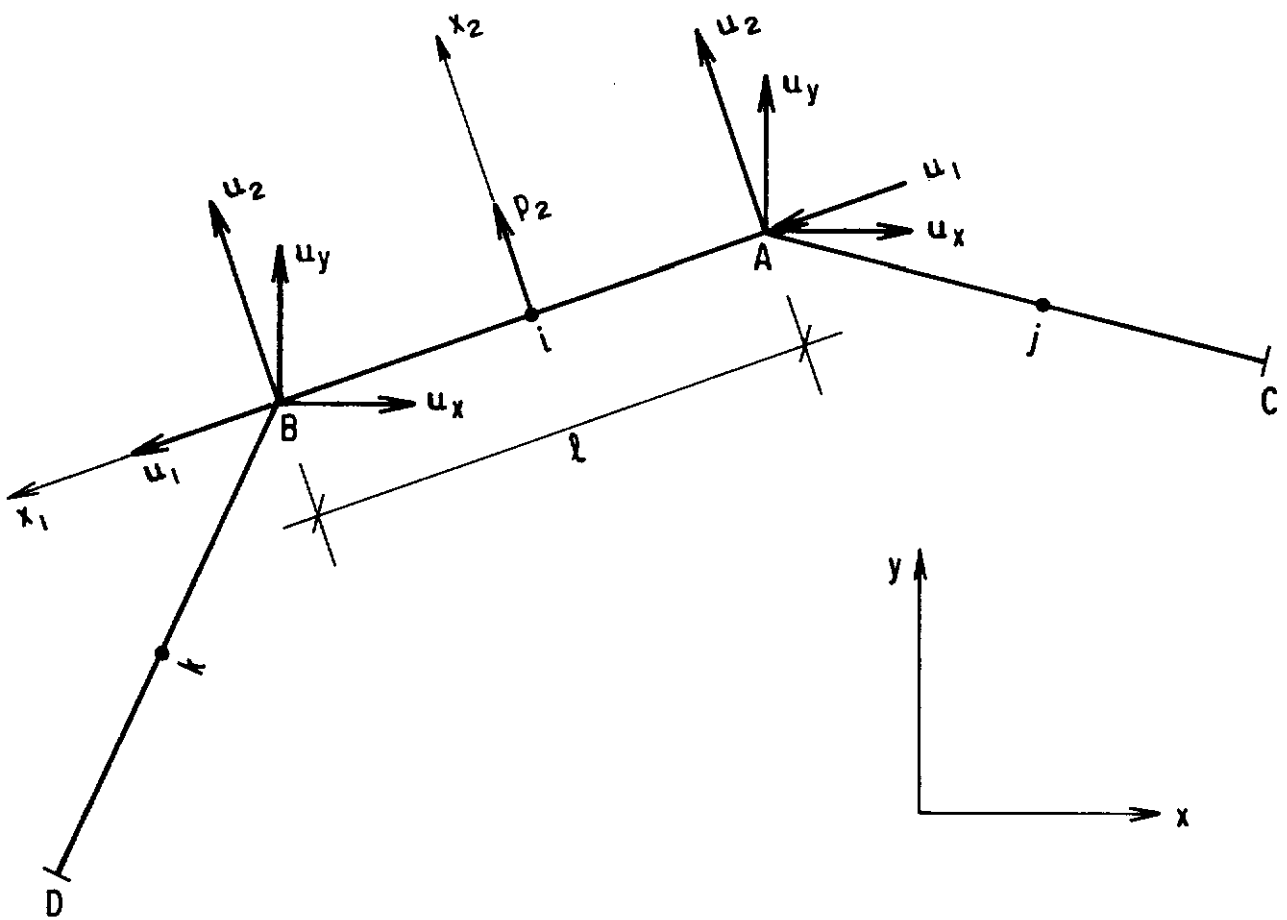


FIGURA 7.20 Deslocamentos nos Pontos do Contorno

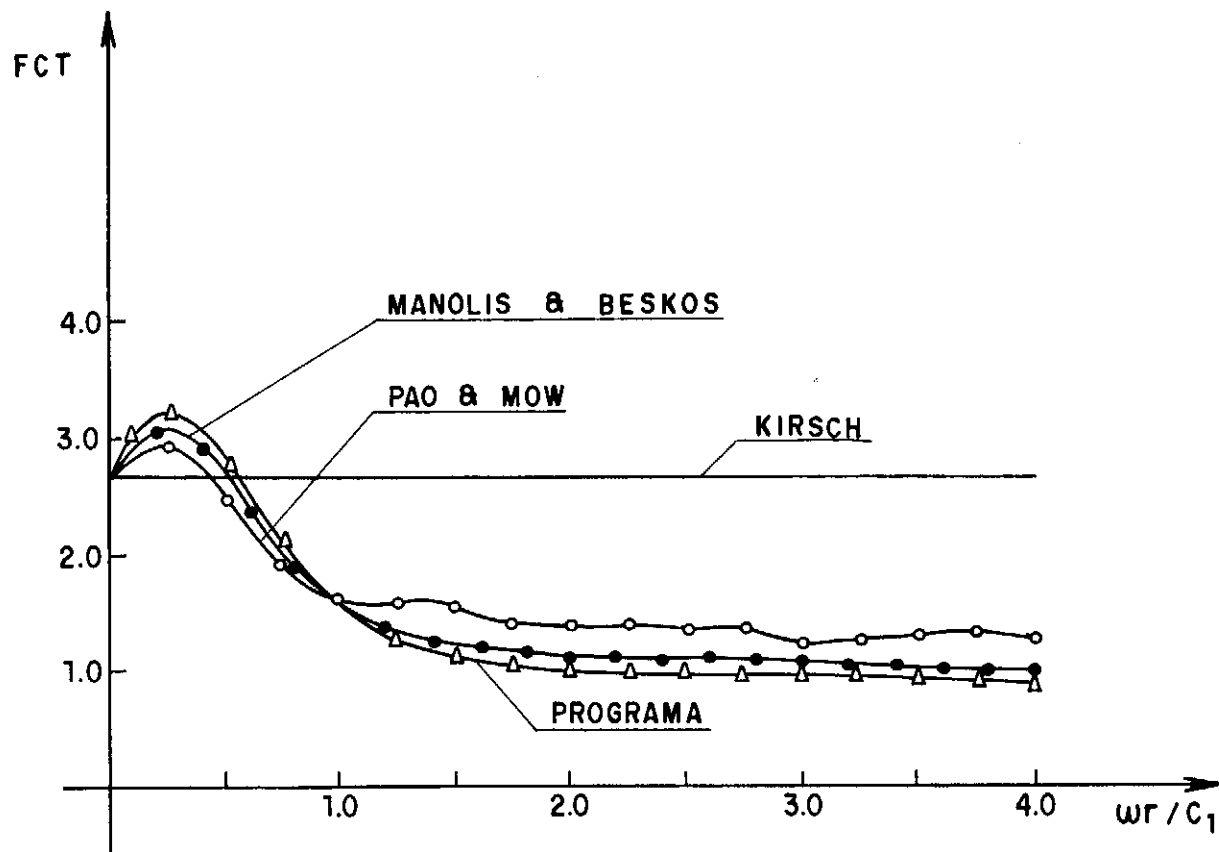


FIGURA 7.21 Resultados para  $\theta = 90^\circ$

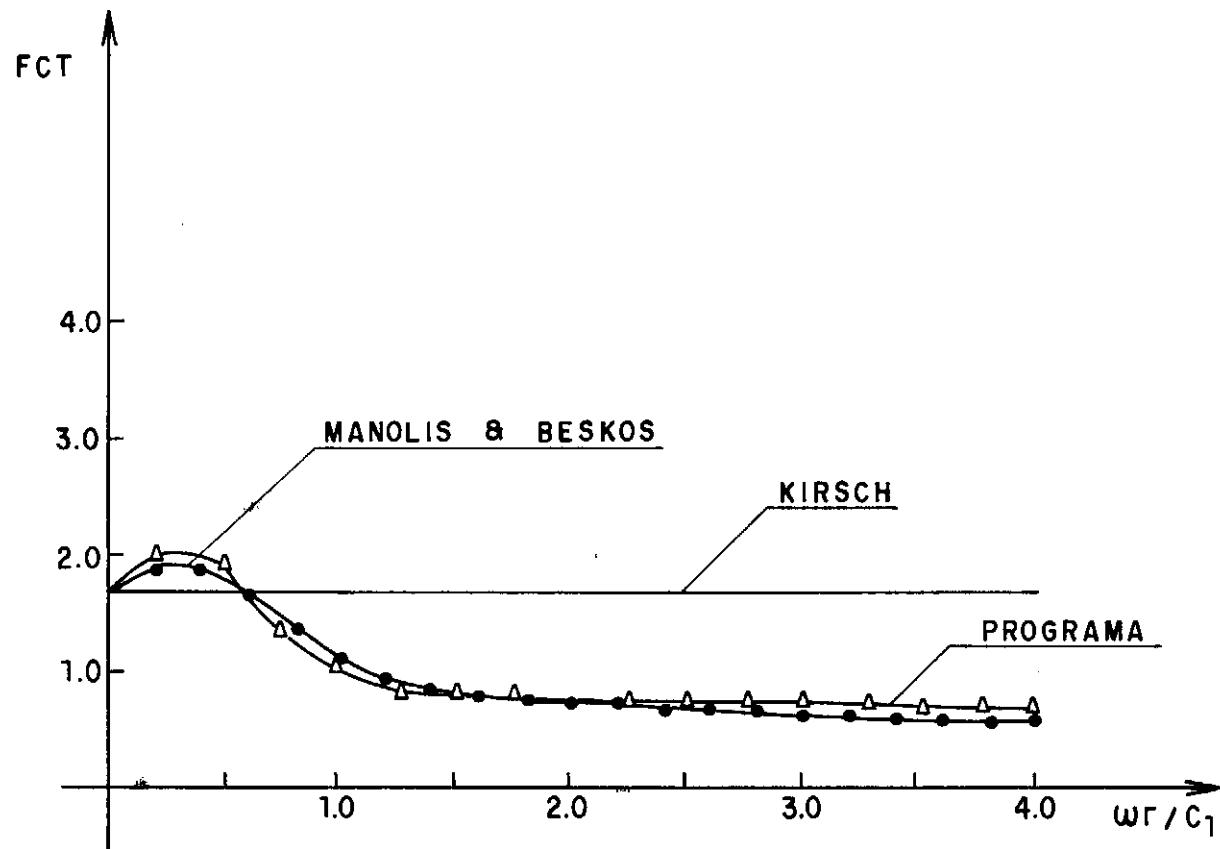


FIGURA 7.22 Resultados para  $\theta = 52,5^\circ$

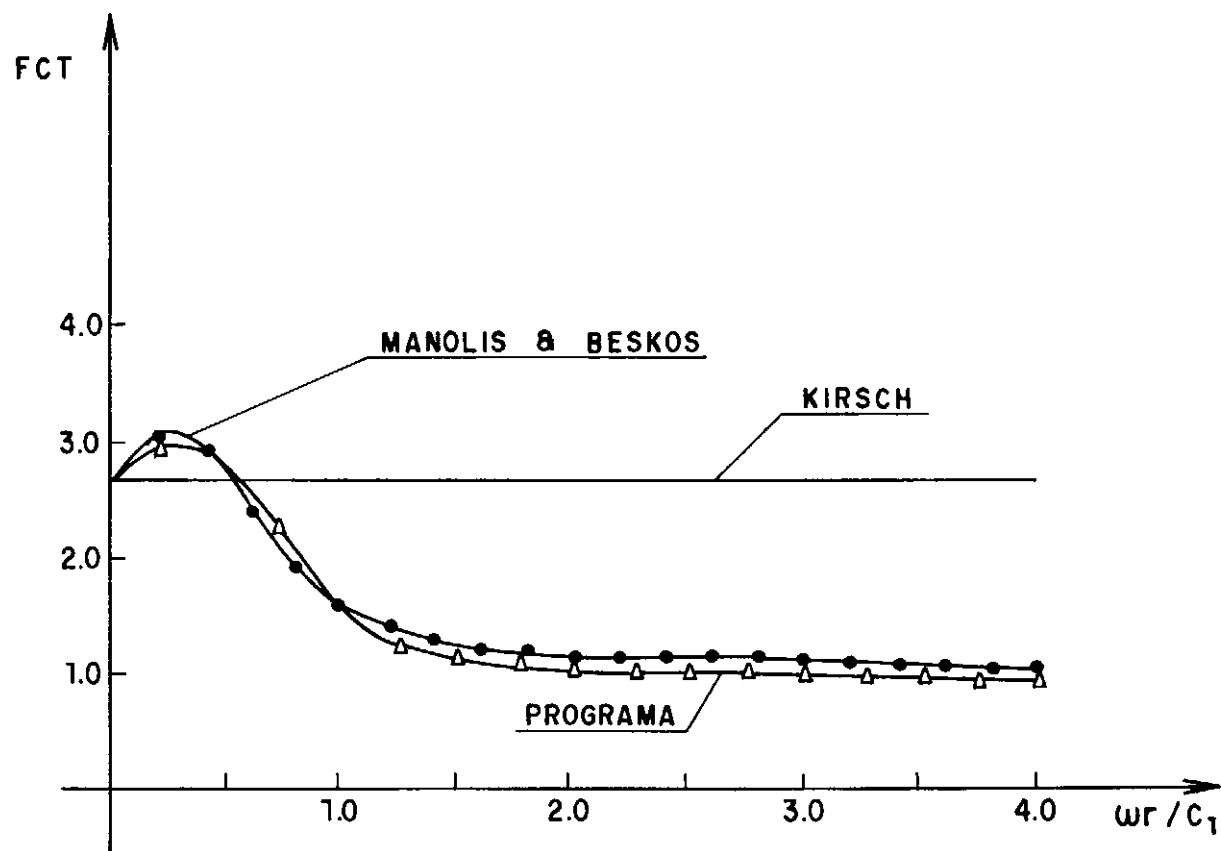


FIGURA 7.23 Resultados para  $\theta = 82,5^\circ$

## CAPÍTULO 8

## CONCLUSÃO

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÃO

O presente trabalho consistiu na aplicação da formulação direta do Método de Elementos de Contorno para a solução de problemas elastodinâmicos harmônicos bi-dimensionais.

Um programa de computador foi desenvolvido utilizando-se elementos constantes. Os resultados obtidos para os três exemplos apresentados no capítulo 7, se aproximam dos conseguidos através de outras técnicas, apresentando ótima convergência.

Comparando-se os resultados obtidos para o exemplo 1 através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, verifica-se que estes apresentaram resultados muito bons para a frequência fundamental. Para a configuração do modo fundamental, foi também verificado que utilizando-se 30 elementos de contorno os resultados eram satisfatórios, enquanto que para o Método dos Elementos Finitos foi necessário uma malha com 100 elementos triangulares lineares e 66 pontos nodais. A economia proveniente da utilização de Elementos de Contorno é mais evidenciada quando são utilizadas regiões semi-infinitas, como é o caso do exemplo 2, onde é necessária a utilização de poucos ou nenhum elemento na superfície livre. Com relação ao exemplo 3, foram igualmente obtidos ótimos resultados.

Muitos domínios físicos podem ser idealizados como meios homogêneos e isotrópicos, mas um modelo mais realístico

seria considerá-los não homogêneos e anisotrópicos. Estes conceitos podem ser incorporados a presente formulação, através da utilização de sub-regiões e o uso da solução fundamental para meio anisotrópico. Sendo estas alterações realizadas com sucesso para o caso estático, a extensão para problemas elastodinâmicos não apresentaria dificuldades. Para a solução de problemas com grau de heterogeneidade elevado no solo, a melhor maneira seria uma combinação mediante a utilização de elementos finitos para a discretização da região de grande heterogeneidade e elementos de contorno para simular melhor as condições de contorno.

Problemas de estado transiente podem ser resolvidos incluindo no programa a inversão numérica da transformada utilizando-se de métodos já existentes. Tal inversão envolve somente a utilização de uma série de soluções para diferentes frequências.

Concluindo, a presente formulação apresenta excelentes resultados para muitos tipos de problemas de Engenharia e a extensão para problemas mais específicos pode ser conseguida sem muita dificuldade.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Dominguez, J., "Elastodynamics", chap 7 - "Progress in Boundary Element Methods", Brebbia, C.A. (Ed.), John Wiley (1981).
2. Dominguez, J. e Alarcon, E., "Dynamic Stiffness of Foundations", 2nd, Int. Conf. on Innovative Num. Anal., Ecole Polytechnic, Montreal (1980).
3. Cruse, T.A. e Rizzo, F.J., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem, I", J. Math. Anal. Appl. 22, pp. 224-259 (1968).
4. Cruse, T.A., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem, II", J. Math. Anal. Appl. 22, pp. 341-355 (1968).
5. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. e Wrobel, L.C., "Boundary Elements Techniques: Theory and Application in Engineering", Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg. (1984).
6. Watson, G.N., "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", the MacMillan Co., New York, N.Y. (1944).
7. Chuang, P.H., "Application of Boundary Element Methods in Elastodynamics", M.Sc. dissertation, University of Southampton (1981).

8. Abramowitz, M. e Stegun, I.R., "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standards, Washington, D.C. (1965).
9. Stroud, A.H. e Secrest, D. "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1966).
10. Timoshenko, S., Young, D.H. e Weaver, J.R., W., "Vibration Problems in Engineering", 4 th Ed., John Wiley.
11. Timoshenko, S. e Goodier, J., "Teoria da Elasticidade", Ed. Guanabara Dois S.A. (1980).
12. Fêodosiev, V., "Resistência dos Materiais", Ed. Lopes da Silva - Porto (1977).
13. Tullberg, O., "Bemdyn - A Boundary Element Program for two - Dimensional Elastodynamics" - Chalmers University of Technology - Göteborg (Sweden).
14. Dominguez, J. e Abascal, R., "On Fundamental Solutions for the Boundary Integral Equations Method in Static and Dynamic Elasticity", Engineering Analysis 1, pp. 128-134. (1984).
15. Goldstein, M. e Thaler, R., "Recurrence Techniques for the Calculation of Bessel Functions", New York University, pp. 102-108. (1959).

16. Abramowitz, M. e Stegun, J., "Generation of Bessel Functions on High Speed Computers", National Bureau of Standards, Washington, D.C., pp. 255-257.
17. Goldstein, M. e Thaler, R., "Bessel Functions for Large Arguments", Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos. New Mexico, pp. 18-26. (1957).
18. Longman, I., "Tables for the Rapid and Accurate Numerical Evaluation of Certain Infinite Integrals Involving Bessel Functions", Department of Applied Mathematics, the Weizmann Institute of Science, Rehovoth-Israel, pp. 166-180.
19. Whittaker, E., e Watson, G., "A Course of Modern Analysis", American Edition (1947).
20. Telles, J.C., "The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems", Lecture notes in engineering vol. 1, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (1983).
21. Spiegel, M., "Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas", Mc.Graw-Hill (1968).
22. Pao, Y.H., "Dynamical Stress Concentration in an Elastic Plate", J. Mech. Appl. 29, pp. 299-305 (1962).
23. Baron, M., e Matthews, A., "Diffraction of a Pressure Wave by a Cylindrical Cavity in an Elastic Medium", J. Mech. Appl. 28, pp. 347-354 (1961).

24. Banaugh, R., e Goldsmith, W., "Diffraction of Steady Elastic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape", J. Mech. Appl. 30, pp. 589-597 (1963).
25. Baron, M., e Parnes, R., "Displacements and Velocities Produced by the Diffraction of a Pressure Wave by a Cylindrical Cavity in an Elastic Medium", J. Mech. Appl. 29, pp. 385-395 (1962).
26. Miklowitz, J., "Transient Compressional Waves in an Infinite Elastic Plate or Elastic Layer Overlying a Rigid Half-Space", J. Mech. Appl., pp. 53-60 (1962).
27. Manolis, G.D., e Beskos, D.E., "Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform", Int. J. Numerical Methods Enging. 17, pp. 573-599 (1981).
28. Manolis, G.D., "Dynamic Response of Underground Structures", Ph.D. Dissertation, University of Minnesota (1980).
29. Flügge, W., "Viscoelasticity", Blaisdell Pub. Co., Waltham, Mass, 1967.
30. Jakub. M., "Dynamic Stiffness of Foundations: 2-D VS 3-D solutions", M.I.T. Research Report NO. R77-36, Civil Engineering Department, (1977).
31. Pao, Y.H., e Mow, C.C., "Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentration", Crane Russak, New York, 1971.

32. Kirsch, G., "Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre", VDI-Z, 42, 797-807 (1898).
33. Clough, R.W., e Chopra, A.K., "Earthquake Stress Analysis in Earth Dams, Proc. ASCE J. Appl. Mech. 92, 197-211 (1966).

## A P Ê N D I C E S

## APÊNDICE A

### MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS



APÊNDICE AMÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Este método é uma técnica numérica para se aproximar a solução de uma equação diferencial parcial:

$$L(v_0) = g \quad \text{em} \quad \Omega \quad (A.1)$$

com as seguintes condições de contorno: essenciais  $F(v_0) = p$  em  $\Gamma_1$  (A.2)

naturais:  $R(v_0) = f$  em  $\Gamma_2$

onde  $L(\quad)$  = operador diferencial linear

$v_0$  = solução exata da equação

$g, p$  e  $f$  = funções de variáveis independentes

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

A função teste  $v$  poderá ser expressa como uma série de funções independentes lineares  $\phi_k$ :

$$v = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \quad (A.3)$$

onde  $\alpha_k$  são coeficientes indeterminados utilizados para aproximar  $v_0$ .

Como na maioria dos casos  $v$  não corresponde a solução exata  $v_0$ , serão encontrados erros no domínio  $\Omega$  e no contorno  $\Gamma$  com os seguintes resíduos:

$$\begin{aligned}
 E &= L(v) - g && \text{em } \Omega \\
 E &= F(v) - p && \text{em } \Gamma_1 \\
 E &= R(v) - f && \text{em } \Gamma_2
 \end{aligned}
 \tag{A.4}$$

Estes resíduos podem ser minimizados forçando-se que a integral do produto do resíduo pela função peso  $W$  seja nula ao longo do domínio  $\Omega$  e do contorno  $\Gamma$ :

$$\int_{\Omega} E W \, d\Omega = 0 \quad \text{em } \Omega$$

(A.5)

$$\int_{\Gamma} E W \, d\Gamma = 0 \quad \text{em } \Gamma$$

ou

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \left\{ L(v) - g \right\} W \, d\Omega &= - \int_{\Gamma_1} \left\{ F(v) - p \right\} g(W) \, d\Gamma + \\
 &+ \int_{\Gamma_2} \left\{ R(v) - f \right\} W \, d\Gamma
 \end{aligned}
 \tag{A.6}$$

onde  $g(W)$  é uma função de  $W$  tal que  $R = g(F)$ .

As equações (A.5) representam a relação básica do método dos resíduos ponderados.

Métodos numéricos diferentes são gerados ao serem utilizadas funções peso ( $W$ ) diferentes:

a)  $W = \delta(q, p)$  → método das diferenças finitas, etc...; onde  $\delta(q, p)$  é a função delta de Dirac.

b)  $W = \phi_k$  onde  $k = 1, N$  → método de Galerkin que constitui o ponto inicial do método dos elementos finitos.

c) se  $W$  satisfaz a equação fundamental  $L(W^*) + \delta(q, p) = 0$  → método de elementos de contorno.

A vantagem da utilização deste método para a formulação da equação integral é que ele é geral e aplicável a qualquer tipo de problema. Desse modo se torna fácil relacionar e combinar o método de elementos de contorno com outro tipo de método, como por exemplo o método dos elementos finitos.

## APÊNDICE B

### CÁLCULO DE $C_{ij}$

APÊNDICE BCÁLCULO DE  $C_{ij}$ 

O valor correspondente a  $C_{ij}$  é (Figura B.1):

$$C_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (B.1)$$

Assim, substituindo-se o valor de  $P_{ij}^*$  (equação (3.2.2.6)) na equação (B.1), obtem-se que:

$$\begin{aligned} C_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \left\{ \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) \left[ \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_i \right] - \right. \\ \left. - \frac{2\chi}{r} \left[ n_j r_{,i} - 2 r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right] - 2 \left( \frac{d\chi}{dr} \right) r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + (B.2) \right. \\ \left. + \left[ \frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right] \left[ \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right] r_{,i} n_j \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

Usando-se coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$r = \varepsilon \quad (B.3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = -1 \quad (B.4)$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial x_i} = - \frac{\partial n}{\partial x_i} = -n_i \quad (\text{B.5})$$

Utilizando-se o fato de que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se das funções modificadas de Bessel para argumentos pequenos (equações (C.48) e (C.49)) que:

$$K_1 \left[ \frac{k\varepsilon}{C} \right] = \frac{C}{k\varepsilon} \quad (\text{B.6})$$

$$K_2 \left[ \frac{k\varepsilon}{C} \right] = 2 \left[ \frac{C^2}{(k\varepsilon)^2} \right] \quad (\text{B.7})$$

Para o cálculo de  $\frac{d\psi}{dr}$  e  $\frac{d\chi}{dr}$  foram utilizadas as relações de recorrência para as funções modificadas de Bessel (equações (C.37) e (C.38)):

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{C_2^2}{C_1^2} - 1 \right] \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\chi}{r} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Substituindo-se os valores das equações (B.3), (B.4), (B.5), (B.6), (B.7), (B.8), (B.9) e (B.10) na equação (B.2) tem-se que:

$$C_{ij} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\delta_{ij}}{\epsilon} \right] d\Gamma \quad (\text{B.11})$$

$$\text{Mas } d\Gamma = \epsilon d\theta \quad (\text{B.12})$$

e  $\bar{\Gamma}_\epsilon$  varia de  $\theta_1$  a  $\theta_2$  (Figura (B.1)).

Então:

$$C_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta_{ij} d\theta = \frac{\delta_{ij}}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (\text{B.13})$$

Assim:

$$\underline{C} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} (\theta_2 - \theta_1) & 0 \\ 0 & (\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

ou

$$\underline{C} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} (\Pi - \alpha_2 + \alpha_1) & 0 \\ 0 & (\Pi - \alpha_2 + \alpha_1) \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Considerando-se o contorno suave tem-se que

$$\alpha_1 = \alpha_2:$$

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{I} \quad (B.16)$$



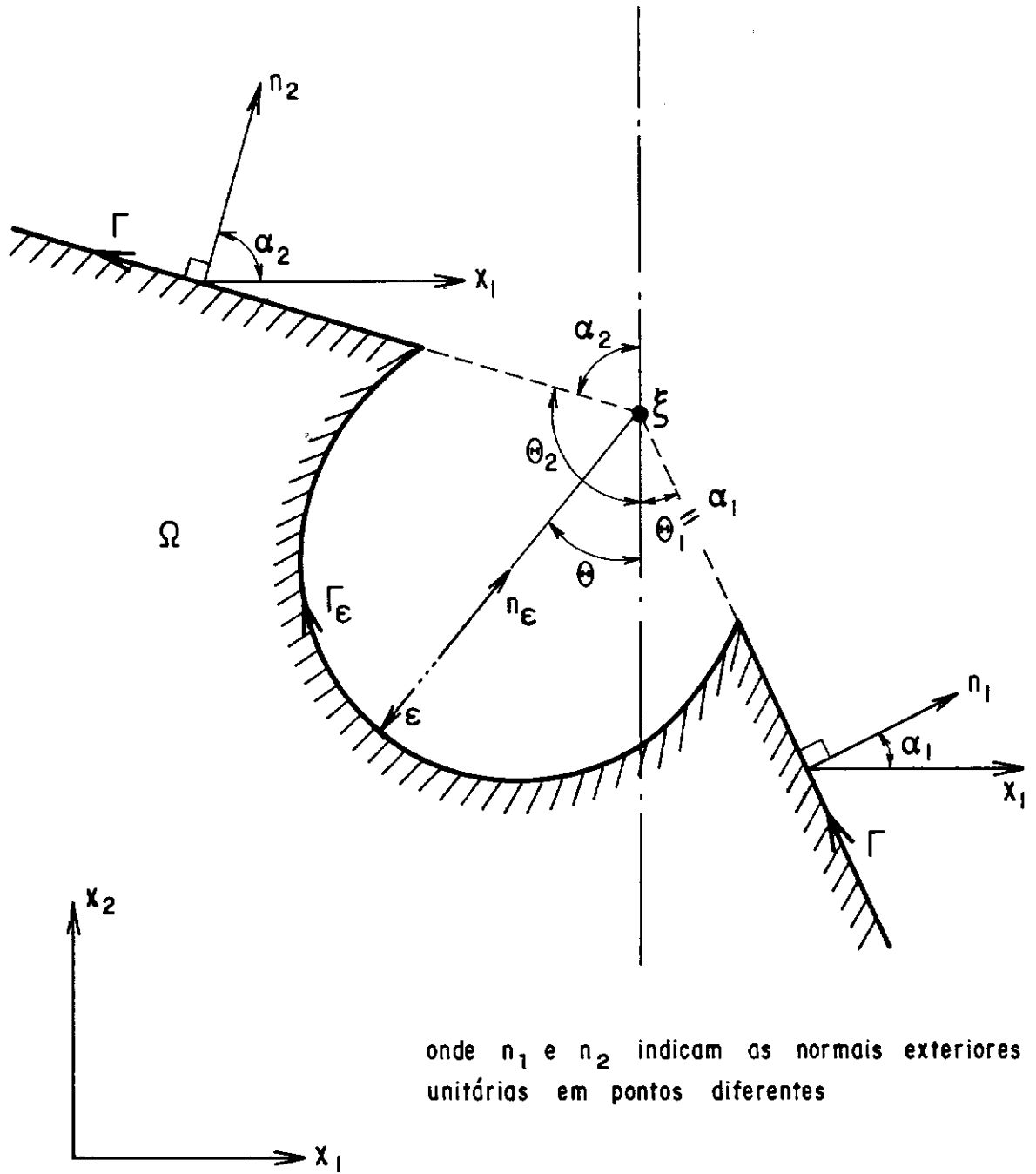


FIGURA B.1 Representação do Contorno  $\Gamma$  para o Cálculo do Coeficiente  $C_{ij}$

## APÊNDICE C

### NOÇÕES SOBRE AS FUNÇÕES DE BESSEL

APÊNDICE CNOÇÕES SOBRE AS FUNÇÕES DE BESSEL

As Funções de Bessel de ordem  $n$  correspondem as soluções da seguinte equação diferencial:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - v^2) w = 0 \quad (C.1)$$

onde  $z$  e  $v$  podem ser números reais, imaginários de complexos.

Tais soluções podem ser:

- Funções de Bessel de primeira classe de ordem  $n$ :  $J_{\pm n}(z)$
- Funções de Bessel de segunda classe de ordem  $n$ :  $Y_n(z)$  (também chamadas de funções de Weber)
- Funções de Bessel de terceira classe de ordem  $n$ :  $H_n^{(1)}(z)$  e  $H_n^{(2)}(z)$  (também chamadas de funções de Hankel).

Portanto as soluções gerais da equação diferencial são:

$$y = A J_n(z) + B J_{-n}(z) \quad n \neq 0, 1, 2, \dots \quad (C.2)$$

$$y = A J_n(z) + B Y_n(z) \quad \text{para todo } n \quad (C.3)$$

$$y = A J_n(z) + B J_n'(z) \left\{ \frac{dz}{z J_n^2(z)} \quad \text{para todo } n \right. \quad (C.4)$$

$$y = A H_n^{(1)}(z) + B H_n^{(2)}(z) \quad (C.5)$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

## 1 - Fórmulas das Funções de Bessel

### 1.1 - Funções de Primeira Classe de Ordem n

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2(4)(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (C.6)$$

$$J_n(z) = \frac{z^{-n}}{2^{-n} \Gamma(1-n)} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2-2n)} + \frac{z^4}{2(4)(2-2n)(4-2n)} - \dots \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)} \quad (C.7)$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

onde  $\Gamma$  é a função Gama definida por:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \forall z > 0$$

e com as seguintes propriedades:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)/z \quad \text{para } x < 0 \\ x \neq -1, -2, -3, \dots$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(p) \Gamma(1 - p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad 0 < p < 1$$

Se  $n \neq 0, 1, 2, \dots, J_n(z)$  e  $J_{-n}(z)$  são linearmente independentes.

Se  $n \neq 0, 1, 2, \dots, J_n(z)$  é limitada para  $z = 0$  enquanto que  $J_{-n}(z)$  é ilimitada.

## 1.2 - Funções de Segunda Classe de Ordem n

$$Y_n(z) = \begin{cases} \frac{J_n(z) \cos n\pi - J_{-n}(z)}{\sin(n\pi)} & n \neq 0, 1, 2, \dots \quad (C.9) \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(z) \cos(p\pi) - J_{-p}(z)}{\sin(p\pi)} & n = 0, 1, 2, \dots \quad (C.10) \end{cases}$$

Para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , tem-se pela regra de L'Hospital que:

$$\begin{aligned}
 Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \left( \frac{z}{2} \right) + \gamma \right\} J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-n} - \\
 &- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \phi(k) - \phi(n+k) \right\} \frac{(z/2)^{2k+n}}{k! (n+k)!} \quad (C.11)
 \end{aligned}$$

onde  $\gamma = 0,577215664901532 \dots$  é a constante de Euler

$$e \phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$$

$$\phi(0) = 0$$

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (C.12)$$

Para qualquer valor de  $n \geq 0$ ,  $J_n(z)$  é limitada para  $z = 0$  enquanto que  $Y_n(z)$  é ilimitada.

### Fórmulas de Recorrência

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z) \quad (C.13)$$

$$J'_n(z) = \frac{1}{2} \{ J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \} \quad (C.14)$$

$$z J'_n(z) = z J_{n-1}(z) - n J_n(z) \quad (C.15)$$

$$z J'_n(z) = n J_n(z) - z J_{n+1}(z) \quad (C.16)$$

$$\frac{d}{dz} \{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z) \quad (C.17)$$

$$\frac{d}{dz} \{z^{-n} J_n(z)\} = -z^{-n} J_{n+1}(z) \quad (C.18)$$

As funções  $Y_n(z)$  satisfazem a relações idênticas.

### Argumentos Pequenos

$$J_n(z) \sim \frac{(z/2)^n}{\Gamma(n+1)} \quad n \neq -1, -2, -3, \dots \quad (C.19)$$

$$Y_0(z) \sim iH_0^{(1)}(z) \sim iH_0^{(2)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right) \ln z \quad (C.20)$$

$$Y_n(z) \sim iH_n^{(1)}(z) \sim iH_n^{(2)}(z) \sim -\left(\frac{1}{\pi}\right) \Gamma(n) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \quad n > 0 \quad (C.21)$$

### 1.3 - Funções de Terceira Classe de Ordem n

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + i Y_n(z) \quad (C.22)$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - i Y_n(z) \quad (C.23)$$

Se  $z$  é transformado num número imaginário  $iz$ , a equação (C.1) se reduz a:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + v^2) w = 0 \quad (C.24)$$

As soluções para esta equação são:

- Funções modificadas de Bessel de primeira classe de ordem  $n$ :  $I_{\pm n}(z)$
- Funções modificadas de Bessel de segunda classe de ordem  $n$ :  $K_n(z)$

As soluções gerais da equação diferencial são:

$$y = A I_n(z) + B I_{-n}(z) \quad n \neq 0, 1, 2, \dots \quad (C.25)$$

$$y = A I_n(z) + B K_n(z) \quad \text{para todo } n \quad (C.26)$$

$$y = A I_n(z) + B I_n(z) \int \frac{dz}{z I_n^2(z)} \quad \text{para todo } n \quad (C.27)$$

## 2 - Fórmulas das Funções Modificadas de Bessel

### 2.1 - Função de Primeira Classe de Ordem $n$

$$\begin{aligned} I_n(z) &= i^{-n} J_n(iz) = e^{-\frac{n\pi i}{2}} J_n(iz) \\ &= \frac{z^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 + \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2(4)(2n+2)(2n+4)} + \dots \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \end{aligned} \quad (C.28)$$



$$\begin{aligned}
I_{-n}(z) &= i^n J_{-n}(iz) = e^{\frac{n\pi i}{2}} J_{-n}(iz) \\
&= \frac{z^{-n}}{2^{-n} \Gamma(1-n)} \left\{ 1 + \frac{z^2}{2(2-2n)} + \frac{z^4}{2(4)(2-2n)(4-2n)} + \dots \right\} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)} \quad (C.29)
\end{aligned}$$

$$I_{-n}(z) = I_n(z) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (C.30)$$

Se  $n \neq 0, 1, 2, \dots$ , então  $I_n(z)$  e  $I_{-n}(z)$  são linearmente independentes.

## 2.2 - Funções de Segunda Classe de Ordem n

$$K_n(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \pi(n\pi)} \left\{ I_{-n}(z) - I_n(z) \right\} & n \neq 0, 1, 2, \dots \quad (C.31) \end{cases}$$

$$K_n(z) = \begin{cases} \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2 \operatorname{sen}(p\pi)} \left\{ I_{-p}(z) - I_p(z) \right\} & n = 0, 1, 2, \dots \quad (C.32) \end{cases}$$

Para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , tem-se pela regra de L'Hospital que:

$$\begin{aligned}
 K_n(z) = & (-1)^{n+1} \left\{ \ln(z/2) + \gamma \right\} I_n(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k-1)! (z/2)^{2k-n} + \\
 & + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \left\{ \phi(k) + \phi(n+k) \right\}
 \end{aligned} \tag{C.33}$$

$$K_{-n}(z) = K_n(z) \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{C.34}$$

### Fórmulas de Recorrência

$$I_{n+1}(z) = I_{n-1}(z) - \frac{2n}{z} I_n(z) \tag{C.35}$$

$$I_n'(z) = \frac{1}{2} \left\{ I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z) \right\} \tag{C.36}$$

$$z I_n'(z) = z I_{n-1}(z) - n I_n(z) \tag{C.37}$$

$$z I_n'(z) = z I_{n+1}(z) + n I_n(z) \tag{C.38}$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^n I_n(z) \right\} = z^n I_{n-1}(z) \tag{C.39}$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-n} I_n(z) \right\} = z^{-n} I_{n+1}(z) \tag{C.40}$$

$$K_{n+1}(z) = K_{n-1}(z) + \frac{2n}{z} K_n(z) \quad (C.41)$$

$$K_n'(z) = \frac{1}{2} \left\{ K_{n-1}(z) + K_{n+1}(z) \right\} \quad (C.42)$$

$$z K_n'(z) = -z K_{n-1}(z) - n K_n(z) \quad (C.43)$$

$$z K_n'(z) = n K_n(z) - z K_{n+1}(z) \quad (C.44)$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^n K_n(z) \right\} = -z^n K_{n-1}(z) \quad (C.45)$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-n} K_n(z) \right\} = -z^{-n} K_{n+1}(z) \quad (C.46)$$

### Argumentos Pequenos

$$I_n(z) \sim \frac{(z/2)^n}{\Gamma(n+1)} \quad n \neq -1, -2, \dots \quad (C.47)$$

$$K_0(z) \sim -\ln(z) \quad (C.48)$$

$$K_n(z) \sim \frac{1}{2} \Gamma(n) \left( \frac{z}{2} \right)^{-n} \quad n > 0 \quad (C.49)$$